

Untersuchung der dynamischen Energieverteilung in ko-resonant gekoppelten Cantilever-Sensoren

Nynne Britt Edeler¹, Ioannis Lampouras,^{1,2} und Julia Körner¹

¹Institut für Grundlagen der Elektrotechnik & Messtechnik, Leibniz Universität Hannover, Deutschland

²Technische Universität Ilmenau, Deutschland

Kontakt: koerner@geml.uni-hannover.de

Einleitung

Dynamische Cantilever-Sensoren werden in vielen verschiedenen Bereichen als sensitive Massen- oder Kraftsensoren eingesetzt, z.B. in der Materialcharakterisierung mittels Rastersonden-Methoden oder in der Gassensorik [1,2]. Ein Hauptanliegen ist dabei die Steigerung der Empfindlichkeit bei gleichzeitig zuverlässiger Anregung und Detektion des Schwingungszustandes. Hierfür wurde in den letzten Jahren ein ko-resonanter Ansatz entwickelt, mit dem in verschiedenen experimentellen Arbeiten eine Steigerung des Messsignals um mehrere Größenordnungen gezeigt werden konnte [3,4].

Das Konzept beruht auf der mechanischen Kopplung und Eigenfrequenzanpassung zwischen einem Mikrocantilever und einem hochempfindlichen Nanocantilever. Je nach Anpassungsgrad, d.h. Stärke der Kopplung, entsteht ein ko-resonanter Schwingungszustand, bei dem ein äußerer Einfluss auf den Nanocantilever (z.B. Massebeladung, Kraftwirkung) das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems verändert. Diese Änderung kann mit etablierten Methoden am Mikrocantilever detektiert werden [5].

Der frequenzanpassungs-abhängige ko-resonante Zustand basiert auf der komplexen Wechselwirkung zwischen beiden Cantilovern und führt zu einer Reihe von Effekten, die für eine Sensoranwendung berücksichtigt werden müssen. Dazu gehören u.a. die Ausbildung effektiver Sensorparameter, Amplitudenverstärkung und die Linearität / Stabilität der Schwingung [6]. Diese Effekte können auf fundamentaler Ebene durch den Energieaustausch zwischen Oszillatoren beschrieben werden [7,8].

Um dies für das ko-resonante System zu untersuchen, wurde ein entsprechendes Modell in der finite Elemente Software *Comsol Multiphysics* implementiert und dort hinsichtlich der Energieverteilungen für verschiedenen Anpassungsgrade und Anregungsfrequenzen für harmonische Anregung im Zeitbereich analysiert.

Methoden und Materialien

Comsol-Modell des ko-resonanten Systems

Basierend auf einem realen ko-resonanten Cantilever-System wurde ein entsprechendes Modell in *Comsol Multiphysics* erstellt (vgl. Abb 1a). Die verwendeten Abmessungen sowie für die Simulation relevante Materialparameter sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Das Modell besteht zusätzlich aus einem Trägerchip, der deutlich größere Abmessungen als die beiden Cantilever aufweist, so dass dessen Eigenfrequenz sehr weit von denen der Schwinger entfernt ist.

In der praktischen Anwendung wird das System in der Regel mittels eines piezoelektrischen Aktors zum Schwingen angeregt. Im Modell wird dies durch eine periodische Auslenkungskraft, die am Trägerchip ansetzt, abgebildet. Hierfür wird eine harmonische Flächenkraftdichte in der Form $\sigma = -10 \cdot \sin(2\pi \cdot f_R \cdot t)$ kPa mit der Anregungsfrequenz f_R verwendet.

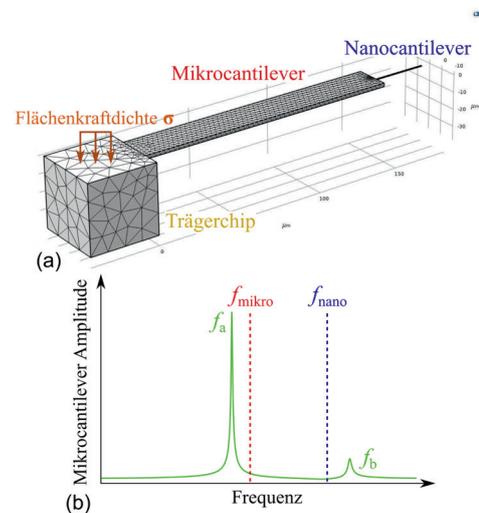


Abb. 1: (a) Vernetztes Comsol-Modell des untersuchten ko-resonanten Cantilever-Systems und (b) Schema zur Verdeutlichung der relevanten Anregungsfrequenzen. Hierbei sind f_a und f_b die Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems und f_{mikro} bzw. f_{nano} die Eigenfrequenzen der Einzelschwinger.

Tab. 1: Für die Simulation verwendete Abmessungen und Materialparameter der Cantilever

| Parameter | Wert |
|---------------------------------|---------------------------------|
| <i>Mikrocantilever</i> | |
| Länge L_1 | 150 μm |
| Breite B_1 | 20 μm |
| Dicke D_1 | 2 μm |
| <i>Nanocantilever</i> | |
| Länge L_2 | 33,55 μm |
| Breite B_2 | 1 μm |
| Dicke D_2 | (0,0805 - 0,1205) μm |
| <i>Materialwerte (Silizium)</i> | |
| Dichte ρ | 2329 kg/m ³ |
| Elastizitätsmodul E | 170 GPa |
| Poissonzahl ν | 0,28 |

Durchgeführte Studien

In *Comsol Multiphysics* können zur Analyse des Systemverhaltens verschiedene stationäre und zeitanhängige Studien durchgeführt werden. Im Folgenden werden die verwendeten Ansätze kurz hinsichtlich der zugrunde liegenden mathematischen Hintergründe beschrieben.

Eigenfrequenzanalyse: Hierbei werden mittels Modalanalyse die Eigenfrequenzen eines ungedämpften Systems ohne äußere Kraftereinwirkung bestimmt. Dafür wird zuerst eine endliche Anzahl an Eigenwerten λ berechnet, aus welchen anschließend über $f = -\lambda/(2\pi j)$ die jeweilige Eigenfrequenz f bestimmt wird [9]. Der Zusammenhang $\lambda = -j\omega$ verknüpft schlussendlich die Eigenwerte mit der zugehörigen Differentialgleichung:

$$-\rho\omega^2\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (1)$$

Hierbei beschreiben ω die Kreisfrequenz, \mathbf{u} die Auslenkung, ρ die Dichte und \mathbf{S} den zweiten *Piola-Kirchhoff* Spannungstensor, in welchem die Spannungs- und Dehnungstensoren sowie der Einfluss des Elastizitätsmoduls und der Poissonzahl zusammengefasst sind [9].

Frequenzbereichsanalyse: Hier wird die Reaktion eines Systems bei Anregung mit einer frequenzabhängigen harmonischen Kraft simuliert. Daher wird die Differentialgleichung aus der Eigenfrequenzanalyse auf der rechten Seite durch einen Term ergänzt, der aus der Amplitude der Anregungskraft \mathbf{F}_v und der zugehörigen Phase φ besteht [9]:

$$-\rho\omega^2\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F}_v e^{i\varphi} \quad (2)$$

Zeitabhängige Analyse und Energieberechnung: Hierbei wird das Systemverhalten bei einer zeitabhängigen Anregung (im vorliegenden Fall einer Sinusfunktion) bestimmt. Aus der zeitabhängigen Differentialgleichung:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F}_v \quad (3)$$

wird zunächst die Auslenkung und daraus die Geschwindigkeit v ermittelt. Durch Volumenintegration über die kinetische Energiedichte W_{kin} erhält man schlussendlich die kinetische Energie E_{kin} :

$$E_{kin} = \iiint W_{kin} dV = \iiint \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV \quad (4)$$

Für die Bestimmung der elastischen Energie E_{el} kann eine ähnliche Volumenintegration auf Basis des *Hookeschen* Gesetzes und der Annahme eines linear-elastischen Materials erfolgen [9].

Die Gesamtenergie, die sich zu einem beliebigen Zeitpunkt in einem Cantilever befindet, ergibt sich aus der Summe beider Energieanteile.

Ergebnisse

Zur Untersuchung des ko-resonant gekoppelten Systems wurden über Variation der Dicke des Nanocantilevers verschiedene Anpassungszustände der Eigenfrequenzen eingestellt (vgl. Tab. 2) und jeweils die folgenden Studien durchgeführt:

1. Modalanalyse zur Bestimmung der vier relevanten Frequenzen des Systems (vgl. Abb. 1b): f_a und f_b als Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems sowie f_{mikro} bzw. f_{nano} als Eigenfrequenzen der Einzelschwinger.
2. Frequenzbereichsanalyse für jede der ermittelten Eigenfrequenzen zur Untersuchung von Phasenverhältnissen (hier nicht gezeigt).
3. Zeitabhängige Analyse und Bestimmung der Energien in jedem Cantilever, wiederum bei Anregung mit jeder der ermittelten Eigenfrequenzen.

In Tabelle 2 sind die Anpassungsgrade mit den zugehörigen Eigenfrequenzen des Nanocantilevers sowie des gekoppelten Systems zusammengefasst. Die Eigenfrequenz des Mikrocantilevers ist stets konstant und beträgt $f_{\text{mikro}} = 123,68$ kHz.

Tab. 2: Eigenfrequenzen des Nanocantilevers f_{nano} und des gekoppelten Systems f_a, f_b für die untersuchten Anpassungsgrade Δf . Die Eigenfrequenz des Mikrocantilevers ist stets konstant und beträgt $f_{\text{mikro}} = 123,68$ kHz.

| Δf in % | f_{nano} in kHz | f_a in kHz | f_b in kHz |
|-----------------|--------------------------|--------------|--------------|
| -20 | 98,98 | 98,62 | 123,81 |
| -15 | 105,11 | 104,66 | 123,90 |
| -10 | 111,24 | 110,55 | 124,09 |
| -5 | 117,38 | 116,21 | 124,56 |
| -1 | 122,28 | 119,94 | 125,71 |
| 0 | 123,52 | 120,62 | 126,25 |
| 1 | 124,76 | 121,16 | 126,91 |
| 5 | 129,37 | 122,34 | 130,58 |
| 10 | 135,80 | 122,82 | 136,28 |
| 15 | 141,94 | 123,01 | 142,18 |
| 20 | 148,10 | 123,10 | 148,22 |

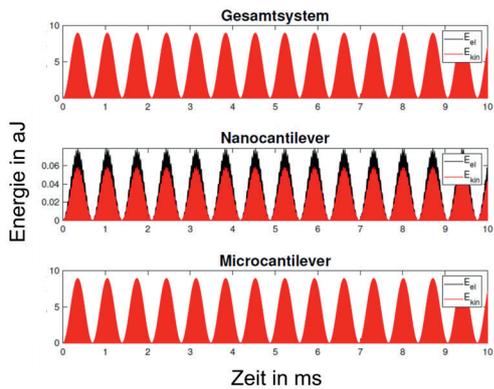
Abb. 2 zeigt exemplarisch simulierte zeitabhängige Energieverläufe bei einer Anregung mit der gekoppelten Eigenfrequenz f_b für die Anpassungsgrade -20% und +1%. Hierbei bedeutet das negative Vorzeichen, dass die Eigenfrequenz des Nanocantilevers (eingestellt über dessen Dicke) kleiner ist als die des Mikrocantilevers. Dargestellt sind beide Energieanteile (kinetische und elastische) für jeden Einzelbalken sowie für das Gesamtsystem.

Aus diesen Zeitverläufen können die Mittelwerte der prozentualen Energieanteile für jeden untersuchten Anpassungsgrad und beide Teilsysteme extrahiert werden. Diese sind in Abb. 3 für jede der vier Anregungsfrequenzen dargestellt.

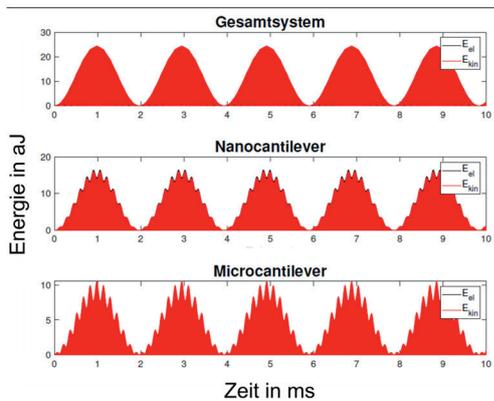
Diskussion

Die Zeitverläufe der Energien unterscheiden sich deutlich je nach Anpassungsgrad und für die beiden Einzelschwinger. Je nachdem mit welcher Frequenz das System angeregt wird, hat derjenige Cantilever mehr kinetische Energie, dessen Eigenfrequenz näher an der Anregungsfrequenz liegt. Für den in Abb. 2a gezeigten Fall ($\Delta f = -20\%$, $f_{\text{nano}} < f_{\text{mikro}}$) ist das bei Anregung mit f_b der Mikrocantilever. Zwar

wird auch der Nanocantilever mit zum Schwingen angeregt, bekommt jedoch einen wesentlich geringeren Energieanteil. Für den Fall der sehr starken Kopplung in Abb. 2b ($\Delta f = 1\%$, $f_{\text{nano}} > f_{\text{mikro}}$) sind die Energien in beiden Schwingern etwa gleich groß. Der Nanocantilever erhält einen etwas größeren Anteil, da die gezeigte Anregungsfrequenz f_b etwas näher an dessen Eigenfrequenz liegt (vgl. Tab. 2). Zudem fällt auf, dass die Grundperiode der Energie „Oberwellen“ zeigt, die für geringe Kopplung nur im Nanocantilever, für starke Kopplung aber in den zeitabhängigen Energieverläufen beider Schwingener auftreten. Dies deutet darauf hin, dass mit einer stärkeren Frequenzanpassung der Nanocantilever zunehmend das Schwingungsverhalten des Mikrocantilevers und damit des Gesamtsystems beeinflussen kann.



(a) Anregung mit f_b ; Anpassungsgrad von -20%



(b) Anregung mit f_b ; Anpassungsgrad von +1%

Abb. 2: Zeitabhängige Verläufe der kinetischen (rot) und elastischen (schwarz) Energien in beiden Einzelbalken sowie im Gesamtsystem bei Anregung mit der Eigenfrequenz des gekoppelten Systems f_b und für einen Anpassungsgrad von (a) -20% (d.h. $f_{\text{nano}} < f_{\text{mikro}}$) und (b) +1% (d.h. $f_{\text{nano}} > f_{\text{mikro}}$).

Für die prozentualen Mittelwerte der Energien bei Anregung mit den Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems f_a und f_b ergeben sich sehr ähnliche Verläufe, die allerdings hinsichtlich der betreffenden Cantilever invertiert sind (vgl. Abb. 3a und b).

Für negative Eigenfrequenzanpassungsgrade Δf befinden sich sowohl der Großteil der kinetischen Energie, als auch der elastischen Energie im Nanocantilever (bei Anregung

mit f_a) bzw. Mikrocantilever (bei Anregung mit f_b). Wird die Frequenzkopplung der Cantilever verstärkt (Δf wird kleiner), teilen sich beide Energieanteile stärker zwischen den Cantilevern auf, wobei eine gleichberechtigte Teilung von 50 % allerdings nie erreicht wird.

Für positives Δf steigen die prozentualen Energieanteile im Mikrocantilever (für f_a) bzw. Nanocantilever (für f_b) weiter an, wohingegen die des jeweils anderen Schwingers sinken.

Dieses Verhalten kann damit begründet werden, dass bei negativem Anpassungsgrad, die Eigenfrequenz des Nanocantilevers näher an f_a liegt. Deshalb fällt diesem Schwingener mehr Energie zu. Bei positivem Anpassungsgrad liegt genau der umgekehrte Fall vor: die Eigenfrequenz des Mikrocantilevers liegt näher an f_a und somit bekommt dieser auch einen größeren Energieanteil.

Für f_b kann dieselbe Argumentation mit umgekehrtem Vorzeichen geführt werden: für negatives Δf liegt f_{mikro} näher an f_b und der Mikrocantilever bekommt den höheren Energieanteil. Für positives Δf liegt f_{nano} näher an f_b und der Nanocantilever erhält mehr Energie.

Dies bedeutet, dass immer demjenigen Cantilever mehr Energie zufällt, dessen Eigenfrequenz näher an der Anregungsfrequenz liegt, wobei bei stark gekoppelten Systemen die Energie fast gleich aufgeteilt wird, da die Eigenfrequenzen der einzelnen Cantilever sehr nah beieinander liegen.

Ein deutlich anderes Bild ergibt sich bei der Anregung des gekoppelten Systems mit den jeweiligen Eigenfrequenzen der Einzelcantilever (vgl. Abb. 3c und d). Bei betragsmäßig großem Eigenfrequenzanpassungsgrad Δf entfällt ein größerer Anteil der gesamten Energie auf denjenigen Cantilever, mit dessen Eigenfrequenz angeregt wird. Ist das System stärker gekoppelt, also der Betrag des Eigenfrequenzanpassungsgrades Δf klein, so gleichen sich die Mittelwerte der prozentualen Anteile an der Gesamtenergie an und der Nanocantilever übernimmt einen größeren Anteil, sowohl bei Anregung mit f_{mikro} als auch mit f_{nano} .

Das heißt, bei stark gekoppelten Systemen dominiert der Nanocantilever den Mikrocantilever und übernimmt mehr Energie.

Dies ist insbesondere von Interesse, wenn es um Rauschbetrachtungen und Linearität bzw. Stabilität und Eignung von ko-resonant gekoppelten Systemen als Sensoren geht. Für eine deutliche Empfindlichkeitssteigerung ist eine sehr gute Frequenzanpassung (kleines Δf) vorteilhaft. Allerdings kann es hierbei, je nach Wahl der Anregungsfrequenz, dazu kommen, dass Störeinflüsse am empfindlichen Nanocantilever (z.B. thermisches Rauschen oder nichtlineares Schwingungsverhalten auf Grund sehr hoher Anregungsamplitude) deutlich in den Mikrocantilever ein-koppeln und die Detektivität des Gesamtsystems ungünstig beeinflussen.

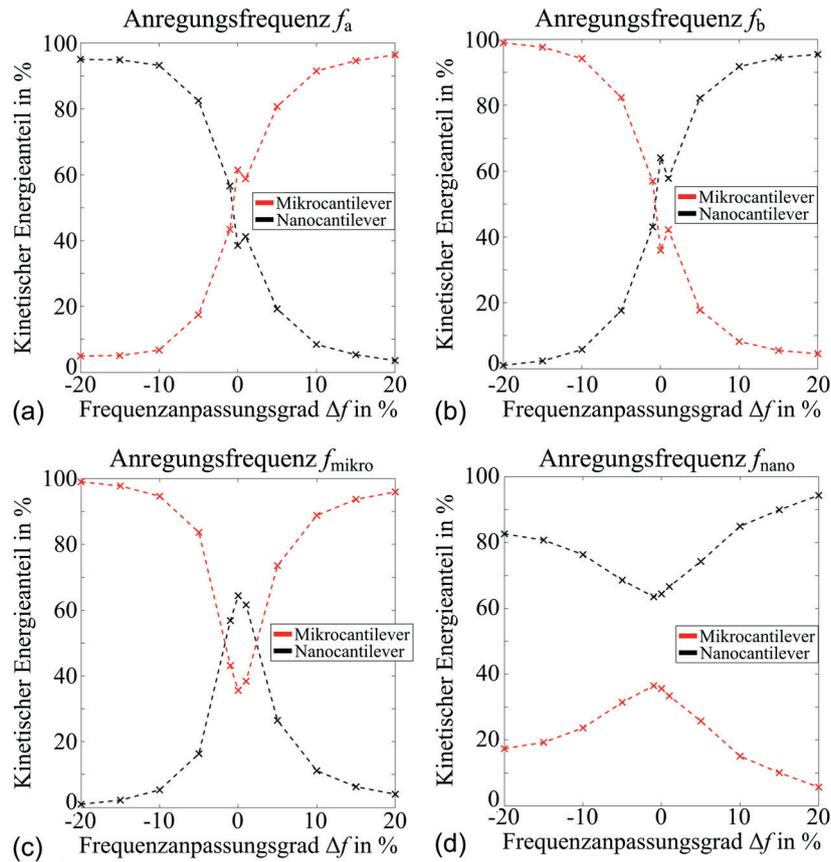


Abb. 3: Aus der Simulation abgeleitete Mittelwerte der prozentualen kinetischen Energie in Mikro- und Nanocantilever für die vier verschiedenen Anregungsfrequenzen und Anpassungsgrade zwischen -20% bis $+20\%$ (negatives Vorzeichen: $f_{\text{nano}} < f_{\text{mikro}}$). Die gestrichelte Linie dient nur der Veranschaulichung, simuliert wurden nur die mit ‚x‘ gekennzeichneten Datenpunkte.

Diese Effekte müssen deshalb bei der Auslegung entsprechender Sensoren berücksichtigt werden. Dazu sind weitere Untersuchungen im Hinblick auf Rausch- und Nichtlinearitätsverhalten basierend auf dem entwickelten Modell Gegenstand zukünftiger Untersuchungen.

Literatur

- [1] A. Boisen et al.: *Cantilever-like Micromechanical Sensors*, Reports of Progress in Physics, 74:036101, 2011
- [2] B. N. Johnson et al.: *Biosensing Using Dynamic-Mode Cantilever Sensors: A Review*, Biosensors and Bioelectronics, 32:1, 2012
- [3] J. Körner et al.: *Magnetic properties of individual Co_2FeGa Heusler nanoparticles studied at room temperature by a highly sensitive co-resonant cantilever sensor*, Scientific Reports, 7:8881, 2017
- [4] J. Körner: *A highly sensitive co-resonant cantilever sensor for materials research: Application to nano-material characterization*, Journal of Materials Research, 33:2504, 2018
- [5] C. F. Reiche et al.: *Introduction of a co-resonant detection concept for mechanical oscillation-based sensors*, Nanotechnology, 26:335501, 2015
- [6] J. Körner: *Co-resonant cantilevers for materials research and sensor applications*, Technical Digest of the 2022 Hilton Head Sensors & Actuators Workshop, USA, June 2022
- [7] R. Sosa et al.: *Energy exchange in globally coupled mechanical phase oscillators*, Physical Review E, 102:012208, 2020
- [8] D. H. Zanette: *Energy exchange between coupled mechanical oscillators: linear regimes*, Journal of Physics Communications, 2:095015, 2018
- [9] COMSOL: *The Structural Mechanics Module User's Guide* (Version 2022)

Danksagung

Die Autoren danken Univ.-Prof. Dr.-Ing. Steffen Strehle und der Technischen Universität Ilmenau für die Möglichkeit zur Nutzung von Comsol Multiphysics im Rechencluster zur Durchführung der umfangreichen Simulationen.