

Detektierung von Strukturschädigungen durch Analyse der Lagrange-Multiplikatoren (LM) der Ausgleichsrechnung

Klaus Brandes, Institut für angewandte Forschung im Bauwesen (IaFB), Sophienstr. 33a,
10178 Berlin, 030-283928-0, E-Mail: klaus.brandes@ingenieur.de

Frank Neitzel, TU Berlin, Professur für Geodäsie und Ausgleichsrechnung, Str. des 17. Juni 135,
030-314-22375, E-Mail: frank.neitzel@tu-berlin.de

Werner Daum, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), Fachgruppe „Mess- und
Prüftechnik; Sensorik“, Unter den Eichen 87, 12205 Berlin, 030-8104-1910,
E-Mail: werner.daum@bam.de

Sven Weisbrich, TU Berlin, Fachgebiet Geodäsie und Ausgleichsrechnung, Str. des 17 Juni 135,
030-314-23204, E-Mail s.weisbrich@tu-berlin.de

Kurzfassung

Die ständige Überwachung von Konstruktionen während ihrer Lebenszeit ist eine bedeutsame Aufgabe, die Gegenstand vielzähliger Forschungsaktivitäten ist. Unter dem Aspekt der Nachhaltigkeit ist die Verlängerung der Nutzungsdauer bestehender Konstruktionen von unschätzbarem Wert, sowohl aus finanziellen Gründen als auch unter dem Gesichtspunkt der Erhaltung der gebauten Umwelt und des Denkmalschutzes. Bei allen Erfolgen der Projekte zur Bauwerkserhaltung ist die Frage, wie entstehende Schädigungen rechtzeitig erkannt werden können, auch wenn sie erst geringfügig sind, nicht befriedigend beantwortet worden. In diesem Beitrag wird eine neue Methode zur Detektierung von Strukturschädigungenvorgestellt. Diese beruht auf einer integrierten Auswertung von Messwerten verschiedener Sensoren nach der Methode der kleinsten Quadrate sowie der Interpretation der dabei auftretenden Lagrange-Multiplikatoren. Diese Methode der Schädigungsanalyse wird anhand eines numerischen Beispiels aus einem Vier-Punkt-Biegeversuch mit einem Verbundträgernäher erläutert.

1. Einleitung und Motivation

Seit vielen Jahren wird versucht, sich entwickelnde Schädigungen bei Strukturen, insbesondere bei Brücken, frühzeitig zu erkennen, um rechtzeitig eingreifen zu können und die weitere Nutzung sicherzustellen. Nach der Schadenserkenkung bestehen die weiteren Herausforderungen in der Schadenslokalisierung und der -quantifizierung. Werden kontinuierlich Daten erfasst, um Aussagen über die Funktionsfähigkeit einer Struktur abzuleiten mit dem Ziel, bei einer Schädigung frühzeitig Gegenmaßnahmen einzuleiten, spricht man von Structural Health Monitoring (SHM). Einen Überblick über aktuelle Techniken für das SHM von Brücken geben (AHLBORN et al 2010a), ein Überblick über kommerzielle Sensoren für die Zustandsüberwachung von Straßenbrücken ist in (AHLBORN et al. 2010b) zu finden.

Die seit einiger Zeit vorrangig gewählte Methode für ein Monitoring besteht aus der Beobachtung und Analyse des Schwingungsverhaltens. Eingehende Untersuchungen zu dieser Methode wurden anhand einer kontrollierten Schädigung der I-40-Brücke über den Rio Grande in Albuquerque, New Mexico, USA durchgeführt, wobei die Anregung mit einem hydraulischen Shaker erfolgte. Als Ergebnis dieser Untersuchungen trafen (FARRAR und JAUREGUI 1998) unter anderem die Feststellung „[...]that standard modal properties such as resonant frequencies and modes shapes are poor indicators of damage“. Jedoch hat die rasante Entwicklung der Mess- und Auswertetechnik in den letzten 15 Jahren zu großen Fortschritten in der Analyse des ambienten Schwingungsverhaltens geführt, siehe z.B. (WENZEL und PICHLER 2005). In (WENZEL 2010) wird eine Untersuchung vorgestellt, in der an der Überführung S101 der Westautobahn in Österreich (vorgespanntes Betontragwerk) mehrere Schädigungstests durchgeführt wurden, bei denen das Schwingungsverhalten mit Beschleunigungsaufnehmern aufgezeichnet wurde. Als Ergebnis der Untersuchung wird angegeben, „dass sämtliche Schädigungstests, so gering sie auch waren, ihre Spuren in der dynamischen Antwort hinterlassen haben“.

In diesem Beitrag soll eine weitere vielversprechende Methode für die Schadenserkenkung von Strukturen vorgestellt werden. Das Ziel ist dabei nicht die Beurteilung des Bauwerks im Frequenzbereich, sondern die Beurteilung von Verformungen unter Berücksichtigung des mechanischen Modells. Durchbiegungen, Neigungsänderungen und Dehnungen können heutzutage mit einer Vielzahl von Sensoren, von Dehnungsmessstreifen (DMS) über Faseroptische Sensoren (FOS) bis hin zu Terrestrischen Laserscannern (TLS) erfasst werden. Die Frage ist nun, wie sich die erfassten geometrischen Veränderungen zu einer Schadenserkenkung nutzen lassen. Dazu wird ein neuer methodischer An-

satz verfolgt. Dieser besteht in einer integrierten Auswertung aller Messdaten, z.B. Durchbiegungen und Krümmungen, mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten. Als funktionales Modell für die Ausgleichung werden Ansatzfunktionen verwendet, die das mechanische Verhalten des zu untersuchenden Bauteils für jede Messwertgruppe beschreiben. Die unbekannt Parameter werden derart gewählt, dass die Gleichungssysteme für jede Messwertgruppe unabhängig voneinander sind. Die Tatsache, dass z.B. zwischen Durchbiegungen und Krümmungen funktionale Beziehungen herrschen, wird durch Bedingungsgleichungen berücksichtigt. Diese Formulierung hat den Vorteil, dass sich Störungen der Gleichungssysteme, wie sie durch Schädigungen hervorgerufen werden, anhand der so genannten Lagrange Multiplikatoren (LM) erkennen lassen, die im Laufe der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten mit Bedingungen zwischen den unbekannt Parametern anfallen.

Eine Ausgleichung ist immer dann durchzuführen, wenn mehr Messdaten vorliegen, als für eine eindeutige Bestimmung der unbekannt Parameter erforderlich ist. In diesem Fall werden an die Messwerte so genannte Verbesserungen angebracht. Stellt man dann die Forderung, dass die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen minimal wird, erhält man eine Lösung mit bestimmten Optimal-eigenschaften, siehe z.B. (NIEMEIER 2008). Diese Methode der Messdatenauswertung wurde von C.F. GAUß (1777-1855) begründet, siehe hierzu GAUß (1887). Sie ist seit vielen Jahrzehnten die herausragende Auswertemethode in der Geodäsie, da sich nur mit ihrer Hilfe Aussagen zu Genauigkeit und Zuverlässigkeit des Ergebnisses treffen lassen, siehe z.B. (NEITZEL 2010). Auch im Bereich des Bauingenieurwesens wird diese Methode seit vielen Jahren erfolgreich eingesetzt, z.B. bei der Formfindung von Stabtragwerken und Seilnetzten mit Hilfe der Kraft-Dichte-Methode, siehe z.B. (SCHEK 1974). Die Berechnung vorgespannter Seil- und Hängernetze mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung beschreibt (GRÜNDIG 1975). Aktuelle Softwareprodukte für die Planung und Berechnung leichter Flächentragwerke, z.B. das Programm „Easy“ (technet GmbH, Berlin), nutzen die Ausgleichung nach kleinsten Quadraten.

Die bei einer Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den unbekannt Parametern auftretenden Lagrange-Multiplikatoren werden in allgemeiner Form in (SILVEY 1959) beschrieben, deren physikalische Bedeutung wird z.B. in KARABULUT (2006) aufgezeigt. SINGER (1995) konnte u. a. zeigen, dass der Lagrange-Multiplikator im Zusammenhang mit der Berechnung von pneumatischen Systemen dem Innendruck entspricht. Wie die Lagrange-Multiplikatoren auf eine Schlechterfüllung von Bedingungen zwischen den unbekannt Parametern reagieren, wird in (WZIONTEK et al. 2001) anhand geometrisch-anschaulicher Beispiele gezeigt. In der Ökonometrie ist die Interpretation der LM als Opportunitätskosten, siehe z.B. (KISTNER 1993), seit Jahrzehnten etabliert.

Die grundlegende Idee der LM-Interpretation für die Strukturuntersuchung wurde bereits in (BRANDES und DAUM 2008) am Beispiel des Langzeit-Monitoring an den Spannbetonbrücken des Hauptbahnhofs Berlin vorgestellt. Eine umfangreiche Darstellung der methodischen Zusammenführung von Struktur-analyse und Messung ist in (BUCHHARDT und BRANDES 2009) zu finden. Der Schwerpunkt des vorliegenden Beitrags liegt auf der konsistenten Darstellung der Bestandteile des Auswerteprozesses. Auf der Grundlage der Messwerte ist zunächst die mathematische Modellbildung durchzuführen, die in Abschnitt 2 beschrieben wird. Danach folgt in Abschnitt 3 die Bestimmung der unbekannt Parameter mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung, bei der auch die LM für die weitere Interpretation anfallen. Die Verwendung der LM zur Detektierung von Strukturschäden wird in Abschnitt 4 an einem numerischen Beispiel aus einem Vier-Punkt-Biegeversuch mit einem Verbundträger gezeigt, der in (UNTERGUTSCH und BRANDES 2011) vorgestellt wurde.

2. Mathematische Modellbildung

Das mathematische Modell der Ausgleichungsrechnung umfasst das funktionale Modell und das stochastische Modell. Im funktionalen Modell müssen die geometrisch-physikalischen Eigenschaften möglichst zutreffend durch Gleichungen beschrieben werden. Im stochastischen Modell werden die Genauigkeitsverhältnisse der Messwerte durch die Angabe von Varianzen und Kovarianzen erfasst.

2.1 Funktionales Modell

Die folgende Formulierung der funktionalen Modelle bezieht sich auf den Fall eines Vier-Punkt-Biegeversuchs mit einem Verbundträger, an dem Durchbiegungen $w(x)$ und Krümmungen $w''(x)$ gemessen wurden. Diese Messwerte werden als Beobachtungen bezeichnet und die jeweiligen Durchbiegungen und Krümmungen zu einer einzelnen Beobachtungsgruppe zusammengefasst. Nun besteht die Aufgabe, die gesuchten Parameter mit den Beobachtungen durch ein geeignetes funktionales Modell zu verknüpfen. In diesem Beispiel erfolgt die Beschreibung der geometrisch-physikalischen Beziehungen zwischen den Messwerten und den unbekannt Parametern durch ein funktionales Modell, das den

verknüpfen. In diesem Beispiel erfolgt die Beschreibung der geometrisch-physikalischen Beziehungen zwischen den Messwerten und den unbekanntem Parametern durch ein funktionales Modell, das den Grundlagen der technischen Mechanik bestmöglich entspricht. Für den durchgeführten Vier-Punkt-Biegeversuch ergibt sich das mechanische Modell des Biegebalkens nach Bernoulli mit Querkraftverformung aus einer Lösung der Differentialgleichung der elastischen Linie für gerade Balken

$$w''(x) = -\frac{M_y}{EI_y} \quad , \quad (1)$$

mit dem Elastizitätsmodul E , dem Biegemoment M_y und dem Flächenträgheitsmoment I_y bezüglich der y -Achse (Querachse) des Balkens, siehe (GUMMERT 1994). Mit x ist die Koordinate der Messstelle bezeichnet. Zudem sind aus den Schnittlasten-Differentialgleichungen die Beziehungen

$$\frac{dM_y}{dx} = M'_y = Q_z \quad \text{und} \quad \frac{d^2M_y}{dx^2} = \frac{dQ_z}{dx} = -M''_y = -Q'_z = -q_z \quad (2)$$

zwischen Biegemoment, resultierender Querkraft Q_z und Streckenlast q_z in Richtung der z -Achse (Vertikalachse) des Balkens bekannt. In den folgenden Abschnitten werden zwei unterschiedliche Ansatzfunktionen zur Beschreibung der Biegelinie des Balkens als Lösung der Differentialgleichung (1) dargestellt und daraus separate funktionale Modelle für die Beobachtungsgruppe der Durchbiegungen und die der Krümmungen aufgestellt. Der funktionale Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Krümmung wird anschließend durch eine Kopplung der beiden funktionalen Modelle erreicht.

2.1.1 Ansatzfunktion mit Sinus-Funktion

Für den zu betrachtenden Versuchsaufbau wird das um die Querkraftverformung erweiterte Balkenmodell nach Jakob Bernoulli verwendet, siehe (SZABO 1964). Im Gegensatz zur Biegeverformung ist bei einem schlanken Träger, wie dem in Abschnitt 4 untersuchten, der Anteil der Schubverformung von geringer Größenordnung. Da die zeitliche Veränderung der Schubsteifigkeit an den tatsächlich verbauten Brückenträgern jedoch von Interesse ist, wurde auch die Schubverformung im Rahmen der Versuchsauswertung explizit ermittelt. Demnach setzt sich die Durchbiegung $w(x)$ des Trägers mit

$$w(x) = w_M(x) + w_Q(x) \quad (3)$$

aus einer anteiligen Durchbiegung infolge einer Biegemomentverformung $w_M(x)$ sowie einer Querkraftverformung $w_Q(x)$ zusammen, wobei in diesem Fall vorausgesetzt wird, dass das Elastizitätsmodul und das Flächenträgheitsmoment entlang des Balkens konstant sind. Zur besseren Veranschaulichung werden entsprechend einfache funktionale Zusammenhänge gewählt, die jedoch eine ausreichende Approximation des Problems ermöglichen. Zudem müssen die Randbedingungen aus dem Balkenmodell erfüllt werden und folglich die Durchbiegung $w(x)$ an den beiden Auflagerpunkten gleich Null sein. Für den resultierenden Anteil an der Durchbiegung aus der Biegemomentverformung erfüllt

$$w_M(x) = W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (4)$$

diese Bedingung, wobei l die Distanz zwischen den beiden Auflagern bezeichnet und W_0 der Koeffizient des funktionalen Ansatzes für die Durchbiegung aufgrund eines Biegemomentes ist. Zur geometrischen Veranschaulichung wurde der Anteil der Biegemomentverformung in Abbildung 1 dargestellt.

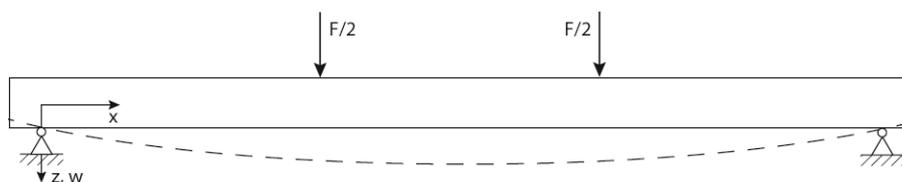


Abbildung 1: Anteil der Durchbiegung infolge einer Biegemomentverformung

Für den Durchbiegungsanteil infolge der Querkraftverformung wird eine andere Verformungsfigur gewählt, die sich aus mehreren Anteilen zusammensetzt und in Abbildung 2 dargestellt ist. Dabei ist die Durchbiegung zwischen den beiden Kräfteinleitungspunkten x_{f_1} und x_{f_2} konstant und verläuft zwischen den Auflagern und den jeweiligen Kräfteinleitungspunkten linear.

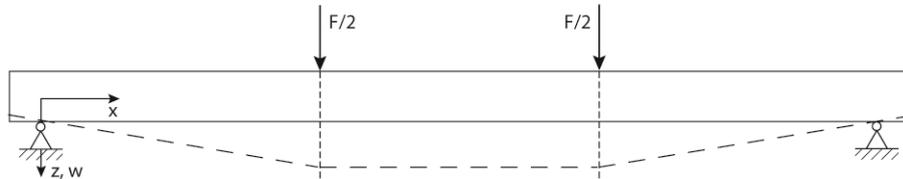


Abbildung 2: Anteil der Durchbiegung infolge einer Querkraftverformung

Der funktionale Zusammenhang für die Querkraftverformung lautet

$$w_Q(x) = W_{Q_0} f_Q(x) \quad , \quad (5)$$

mit

$$f_Q(x) = \begin{cases} \frac{x}{x_{f_1}} & \text{für } 0 \leq x \leq x_{f_1} \\ 1 & \text{für } x_{f_1} \leq x \leq x_{f_2} \\ \frac{l-x}{l-x_{f_2}} & \text{für } x_{f_2} \leq x \leq l \end{cases} \quad . \quad (6)$$

Wie der Abbildung 5 zu entnehmen ist, liegen die Messstellen der induktiven Wegaufnehmer zwischen den beiden Kräfteinleitungspunkten. Folglich resultiert aus (6) ein konstanter funktionaler Ansatz für die Querkraftverformung mit $f_Q(x) = 1$ und der Anteil an der Durchbiegung aufgrund einer Querkraftverformung reduziert sich auf den Koeffizienten des funktionalen Ansatzes W_{Q_0} . Für die gemessenen Durchbiegungen kann somit das funktionale Modell

$$w(x) = W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + W_{Q_0} \quad (7)$$

aufgestellt werden, wobei die Koeffizienten des funktionalen Ansatzes W_0 und W_{Q_0} unbekannte Parameter sind. Nach Bernoulli besteht zwischen der Durchbiegung $w(x)$ und der Krümmung $w''(x)$ in einem Punkt entlang eines Balkens der Zusammenhang

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = w''(x) \quad . \quad (8)$$

Die zweifache Differentiation der Gleichung (7) nach x liefert für die Krümmung die Gleichung

$$w''(x) = -W_0 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad . \quad (9)$$

Betrachtet man nun die Gleichungen (7) und (9), stellt man fest, dass beide denselben unbekannt Parameter W_0 enthalten und folglich eine Abhängigkeit zwischen beiden Gleichungen besteht. Um diese Gleichungen bezüglich der unbekannt Parameter unabhängig voneinander zu formulieren, wird mit V_0 eine weitere Unbekannte derart eingeführt, dass man für die Krümmungen die Gleichung

$$w''(x) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (10)$$

erhält. Dadurch wird formal ermöglicht, dass die Gleichung für die Durchbiegung und die für die Krümmung unabhängig voneinander formuliert werden können. Die Tatsache, dass V_0 mit

$$V_0 = -W_0 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (11)$$

eine Funktion von W_0 ist, wird dadurch berücksichtigt, dass aus (11) die Bedingungsgleichung

$$V_0 + W_0 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = 0 \quad (12)$$

gebildet wird. Diese Bedingungsgleichung zwischen den unbekanntenen Parametern, die auch als „innere Kopplung“ bezeichnet wird, ist im weiteren Auswerteprozess zu berücksichtigen. Durch diese innere Kopplung zeigen sich Abweichungen vom funktionalen Modell, die z.B. durch eine Schädigung der untersuchten Struktur verursacht werden, in einer Schlechterfüllung dieser Bedingung, die somit als Indikator für eine Strukturschädigung verwendet werden kann.

2.1.2 Ansatzfunktion mit Hermite-Polynomen

Für die Beschreibung der Biegelinie eines Balkens durch eine Sinus-Funktion kann nur gefordert werden, dass sich die Durchbiegung in den Auflagern zu Null ergibt. Eine Forderung, dass der Biegewinkel $w'(x)$ bzw. die Krümmung $w''(x)$ in den Auflagern identisch Null ist, ist nicht möglich. Folglich ist die Verwendung der Sinus-Funktion zur Beschreibung der Biegelinie nur für beidseitig gelenkig gelagerte Balken möglich. Eine allgemeinere Darstellung der Biegelinie eines Balkens ist durch die Verwendung von Hermite-Polynomen höherer Ordnung möglich, siehe (FALK 1963). Für Hermite-Polynome 4. Ordnung (kubische Parabeln) können zusätzliche Bedingungen für den Biegewinkel und für Hermite-Polynome 6. Ordnung zusätzlich für die Krümmung in den Auflagern aufgestellt werden. Hermite-Polynome einer gewählten Ordnung α sind Polynome vom Rang $\alpha-1$ und sind in Abbildung 3 im nullstellenfreien Intervall $0 \leq \xi \leq 1$ für $\alpha=4$ dargestellt.

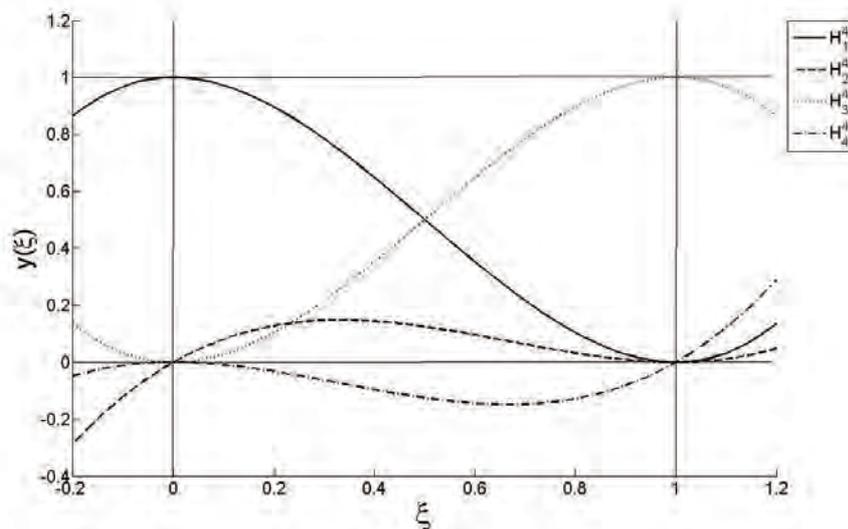


Abbildung 3: Hermite-Polynome 4. Ordnung

Die vier Hermite-Polynome 4. Ordnung ergeben sich zu

$$\begin{aligned} H_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ H_2 &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ H_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ H_4 &= -\xi^2 + \xi^3 \end{aligned} \quad (13)$$

mit

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (14)$$

Die Herleitung des funktionalen Modells für die Durchbiegungen und Krümmungen wird exemplarisch für Hermite-Polynome 4. Ordnung dargestellt und kann analog auf die Verwendung von Hermite-Polynomen höherer Ordnung angewendet werden. Für die gemessenen Durchbiegungen ergibt sich das funktionale Modell zur Beschreibung der Biegelinie eines Balkens durch Linearkombination der Hermite-Polynome 4. Ordnung

$$w(x) = c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_3 H_3 + c_4 H_4 = \sum_{i=1}^4 c_i H_i \quad (15)$$

wobei die Koeffizienten c_1 , c_2 , c_3 , c_4 unbekannte Parameter sind. Das funktionale Modell für die Krümmung entlang des Balkens ergibt sich wiederum durch zweifache Differentiation

$$w''(x) = \sum_{i=1}^4 c_i \frac{d^2 H_i}{dx^2} \quad (16)$$

der Gleichung (15) und ist eine Linearkombination von zweifach abgeleiteten Hermite-Polynomen

$$w''(x) = \frac{1}{l^2} c_1 (-6 + 12\xi) + \frac{1}{l^2} c_2 (-4 + 6\xi) + \frac{1}{l^2} c_3 (6 - 12\xi) + \frac{1}{l^2} c_4 (-2 + 6\xi) = \sum_{i=1}^4 c_i H_i'' \quad (17)$$

in diesem Beispiel aus Geraden. Wie bereits bei dem Ansatz mit einer Sinus-Funktion, sind auch hier die funktionalen Modelle für die Durchbiegung und Krümmung von denselben unbekanntem Parametern c_1, c_2, c_3, c_4 abhängig. Um diese Gleichungen unabhängig voneinander zu formulieren, werden mit s_1, s_2, s_3, s_4 weitere Unbekannte eingeführt, mit deren Hilfe sich die Gleichung für die Krümmungen zu

$$w''(x) = \sum_{i=1}^4 s_i H_i'' \quad (18)$$

ergibt. Die Tatsache, dass die Parameter s_i mit

$$s_i = c_i \quad \forall i = 1 \dots 4 \quad (19)$$

Funktionen der Parameter c_i sind, wird berücksichtigt, in dem aus (19) die Bedingungsgleichungen

$$s_i - c_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots 4 \quad (20)$$

gebildet werden. Diese „innere Kopplung“ ist im weiteren Auswerteprozess zu berücksichtigen und kann, wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, als Indikator für eine Strukturschädigung verwendet werden.

2.2 Stochastisches Modell

Die mathematische Modellbildung umfasst neben der Aufstellung des funktionalen Modells auch die Aufstellung eines stochastischen Modells für die Messwerte. Die Aufstellung dieses Modells muss ebenfalls mit großer Sorgfalt erfolgen, da die gesuchten Parameter sowie deren Genauigkeiten durch die stochastischen Eigenschaften der Messwerte direkt beeinflusst werden. Daher ist es erforderlich, dass für die Messwerte zuverlässige Genauigkeitsangaben in Form von Standardabweichungen vorliegen. In der Regel sind die Herstellerangaben für das verwendete Instrumentarium zu verwenden. Möglich ist auch, Werte zu verwenden, die aus der Erfahrung über einen längeren Zeitraum mit dem Messsystem gesammelt wurden. Werden heterogene Messwerte verwendet, z.B. Durchbiegungen in [cm] und Krümmungen in [10^{-5} cm^{-1}], ist es nur mit Hilfe des stochastischen Modells möglich, die Genauigkeitsrelationen zwischen den Messwertgruppen zu berücksichtigen. Bestehen Korrelationen zwischen den Eingangsgrößen, z.B. durch eine Vorprozessierung der Messwerte, können diese ebenfalls im stochastischen Modell abgebildet werden. Das stochastische Modell wird repräsentiert durch eine Varianz-Covarianzmatrix Σ_{LL} , aus der sich nach einer skalaren Division mit einem frei wählbaren Wert für die theoretische Varianz der Gewichtseinheit σ_0^2 die Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{LL} ergibt. Die Inverse von \mathbf{Q}_{LL} geht als Gewichtsmatrix \mathbf{P} in die Ausgleichung ein. Ein zutreffendes stochastisches Modell ist zudem unerlässlich für die Qualitätsbeurteilung der Ausgleichungsergebnisse mit Hilfe statistischer Testverfahren. Es ist wichtig anzumerken, dass bei der Auswertung ohne Berücksichtigung einer Gewichtsmatrix \mathbf{P} implizit über das stochastische Modell verfügt wird und zwar derart, dass alle Messwerte als gleich genau und unkorreliert in die Ausgleichung eingehen.

3. Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem $\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, wobei der Vektor \mathbf{L} die Messwerte und der Vektor \mathbf{X} die Unbekannten enthält. In der Matrix \mathbf{A} sind die Koeffizienten des linearen funktionalen Modells zusammengefasst. Liegen mit $n > u$ mehr Beobachtungen n als unbekannte Parameter u vor, handelt sich um ein überbestimmtes Problem, für das folglich keine eindeutige Lösung existiert. Um eine Lösung zu ermöglichen, wird der Vektor der Verbesserungen \mathbf{v} eingeführt und an die Beobachtungen angebracht, so dass sich die linearen Verbesserungsgleichungen

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (21)$$

ergeben. Zur eindeutigen Lösung dieses Gleichungssystems bedarf es einer zusätzlichen Forderung an eine Funktion dieser Verbesserungen und häufig wird mit

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min \quad (22)$$

gefordert, dass die Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen zum Minimum wird, was als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet wird. Sind von den ausgeglichenen Parametern $\hat{\mathbf{X}}$ Bedingungen \mathbf{b} zu erfüllen, werden die Koeffizienten der linearen Bedingungsgleichungen in einer Matrix \mathbf{B} zusammengefasst, so dass sich

$$\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{b} \quad (23)$$

ergibt. Betrachtet man die Struktur der Verbesserungsgleichungen (21), so fällt auf, dass auf der linken Seite nur Beobachtungen sowie Verbesserungen stehen und auf der rechten Seite nur eine Funktion der Unbekannten. Zusätzlich sind noch Bedingungen (23) zu erfüllen, die sich nur auf die Unbekannten beziehen. Ein derartiges Ausgleichungsproblem wird als Gauß-Markov Modell mit Bedingungen zwischen den Unbekannten bezeichnet. Die Lösung ist z.B. in (NIEMEIER 2008) beschrieben.

Bei bestehender Forderung $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min$ bilden die Bedingungsgleichungen eine Nebenbedingung, die durch Lösung der Lagrange-Funktion gelöst werden kann. Diese ergibt sich zu

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + 2\lambda^T (\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{b}) \rightarrow \min, \quad (24)$$

wobei der Vektor λ die Lagrange-Multiplikatoren beinhaltet. Die Lösung dieser Extremwertaufgabe erfolgt durch die Bildung der ersten Ableitungen nach \mathbf{X} und λ , die anschließend zu Null gesetzt werden. Daraus erhält man das so genannte erweiterte Normalgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Die Lösung dieses Normalgleichungssystems beinhaltet neben den gesuchten unbekannt Parametern auch die Lagrange-Multiplikatoren, die als Indikator für eine Schädigungsanalyse verwendet werden können.

3.1 Ansatzfunktion mit Sinus-Funktion

Für die Durchbiegungen ergeben sich die Verbesserungsgleichungen

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1. \quad (26)$$

Mit dem Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_1 = [w_1 \quad \dots \quad w_{n_1}]^T \quad (27)$$

und dem Vektor der Unbekannten

$$\mathbf{X}_1 = [W_0 \quad W_{Q_0}]^T \quad (28)$$

ergibt sich die Funktionalmatrix mit den Koeffizienten des linearen funktionalen Modells (7) zu

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x_{w_1}}{l}\right) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \sin\left(\frac{\pi x_{w_{n_1}}}{l}\right) & 1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

wobei mit n_1 die Anzahl der gemessenen Durchbiegungen bezeichnet ist. Für die Krümmungen ergeben sich die Verbesserungsgleichungen zu

$$\mathbf{L}_2 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2. \quad (30)$$

Mit dem Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_2 = [w_1'' \quad \dots \quad w_{n_2}'']^T \quad (31)$$

und dem Vektor der Unbekannten

$$\mathbf{X}_2 = [V_0] \quad (32)$$

ergibt sich die Funktionalmatrix mit den Koeffizienten des linearen funktionalen Modells (10) zu

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x_{k_1}}{l}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{\pi x_{k_{n_2}}}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (33)$$

wobei mit n_2 die Anzahl der gemessenen Krümmungen bezeichnet ist. Zusätzlich muss die Bedingung zwischen den beiden unbekanntem Parametern V_0 und W_0 aus Gleichung (12) erfüllt werden. Die Koeffizienten dieser Bedingungsgleichung werden in der Matrix

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

zusammengefasst. Fasst man die Vektoren und Matrizen aus (26) bis (33) in der Form

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

zusammen und setzt diese zusammen mit (34) in (25) ein, erhält man das Normalgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

wobei mit \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 die Gewichtsmatrizen der Beobachtungen bezeichnet sind. Aus der Lösung dieses Gleichungssystems erhält man die ausgeglichenen Unbekannten und den Lagrange-Multiplikator. Bei Schädigungen am Tragwerk (z.B. durch Risse) ändern sich die Messwerte im Bereich der Schädigung. Da jedoch das zugrunde gelegte mechanische System und das daraus resultierende funktionale Modell unverändert gelassen werden, vergrößert sich der Lagrange-Multiplikator, was als Indikator für eine Schädigung verwendet werden kann. Wenn nun die Beanspruchung aus einer Belastung erfolgt und die Messwerte in Bezug zu den Last-Durchbiegungen gesetzt werden, sind Abweichungen von den Werten der unbeschädigten Konstruktion deutlich erkennbar. Es ist also die statische oder quasi-statische Beanspruchung ausreichend. Für eine Lokalisierung von Schädigungen können verfeinerte Modelle eingesetzt werden.

3.2 Ansatzfunktion mit Hermite-Polynomen

Für die Durchbiegungen ergeben sich die Verbesserungsgleichungen wieder in der Form

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 \quad (37)$$

Der Beobachtungsvektor entspricht (27), der Vektor der Unbekannten ergibt sich für den Ansatz mit Hermite-Polynomen zu

$$\mathbf{X}_1 = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T, \quad (38)$$

die Funktionalmatrix mit den Koeffizienten des linearen funktionalen Modells (15) ergibt sich zu

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} H_1(x_{w_1}) & H_2(x_{w_1}) & H_3(x_{w_1}) & H_4(x_{w_1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_1(x_{w_{n_1}}) & H_2(x_{w_{n_1}}) & H_3(x_{w_{n_1}}) & H_4(x_{w_{n_1}}) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Für die Krümmungen ergeben sich die Verbesserungsgleichungen zu

$$\mathbf{L}_2 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2, \quad (40)$$

mit dem Beobachtungsvektor (31). Mit dem Vektor der Unbekannten

$$\mathbf{X}_2 = [s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4]^T \quad (41)$$

ergibt sich die Funktionalmatrix mit den Koeffizienten des linearen funktionalen Modells (18) zu

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} H_1''(x_{w_1''}) & H_2''(x_{w_1''}) & H_3''(x_{w_1''}) & H_4''(x_{w_1''}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_1''(x_{w_{n_2}''}) & H_2''(x_{w_{n_2}''}) & H_3''(x_{w_{n_2}''}) & H_4''(x_{w_{n_2}''}) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Zusätzlich müssen die Bedingung zwischen den unbekanntem Parametern c_i und s_i aus Gleichung (20) erfüllt werden. Die Koeffizienten dieser Bedingungsgleichungen werden in der Matrix

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

zusammengestellt. Fasst man die Vektoren und Matrizen wieder wie in (35) beschrieben zusammen, erhält man die Lösung für die gesuchten Parameter aus der Lösung eines Normalgleichungssystems in der Form (36).

4 Anwendungsbeispiel

4.1 Versuchsaufbau und Messdatenerfassung

Bei technischen Anwendungen ist vor allem den Details der Konstruktion Aufmerksamkeit zu widmen. Es ist sicher aussichtslos, in Bereichen der Konstruktion Hinweise auf Schädigungen erkennen zu wollen, in denen keine Sensoren angebracht sind. In der Nähe von Schäden (z.B. Rissen) müssen unbedingt Sensoren appliziert sein, mit denen z.B. Durchbiegungen und Dehnungen erfasst werden können. Für die Erprobung der Messsensorik und eine Überprüfung des Bruchverhaltens der Verbundträger wurde ein Vier-Punkt-Biegeversuch durchgeführt, siehe Abbildung 4. Der Versuch wurde vom Institut für Stahl- und Holzbau an der TU Dresden, Professur für Ingenieurholzbau und baukonstruktives Entwerfen durchgeführt, das auch die Messdaten der Wegaufnehmer und Dehnmessstreifen für die weitere Auswertung zur Verfügung stellte. Parallel dazu führte auch die Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) an dem Verbundträger Messungen mit faseroptischen Sensoren durch. Insgesamt war der Versuch Teil des F&E-Projektes Hochleistungs-Holztragwerke (HHT), dessen Federführung beim Institut für angewandte Forschung im Bauwesen (IaFB) lag.

Im Rahmen des Versuchs wurde ein Brückenträger bis zum Versagen schrittweise belastet und gleichzeitig Dehnungen und Durchbiegungen an ausgewählten Stellen gemessen. Der Versuchsaufbau und die Anordnung der Messsensoren können Abbildung 5 entnommen werden. Die Messung der Verformungen in mittleren Trägerbereich erfolgte mittels induktiven Wegaufnehmern (IWA). Die Dehnungen in Trägermitte wurden mit Dehnmessstreifen (DMS) an der Trägerober- und -unterseite sowie mit vier faseroptischen Sensoren (FOS) mit je sieben Messstellen (Bragg-Gitter) im Abstand von 25 cm in der unteren Verbundfuge gemessen. Die im Rahmen des Versuchs erfassten Messdaten sollen im Folgenden exemplarisch für die der Gebrauchslast des Brückenträgers entsprechenden Laststufe durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgewertet werden.

Die Lage der neutralen Faser des Balkens konnte aus den Messungen mit den elektrischen DMS in der Balkenmitte errechnet werden und lag genau in der Mitte der Balkenhöhe. Die gemessenen Dehnungen der vier parallel angeordneten FOS an der Balkenunterseite wurden für jede der sieben Messstellen gemittelt und anschließend durch Kenntnis der Lage der neutralen Faser in Krümmungen überführt. Die durch IWA gemessenen Durchbiegungen wurden jeweils für die Sensoren 3 und 4 sowie 5 und 6 gemittelt. In die Ausgleichung gehen demnach die Durchbiegungen der IWA und die aus den FOS sowie DMS abgeleiteten Krümmungen ein.

Die Belastung mit zwei Einzellasten, $F/2$ in den Drittelpunkten wurde über mehrere Stunden nach einem vorgegebenen Plan verändert. Eine schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zeigt Abbildung 5, die Messwerte sind in Tabelle 1 aufgelistet. Die Lage der induktiven Wegaufnehmer kann ebenfalls Abbildung 5 entnommen werden. Der Sensor IWA1 wurde in der Balkenmitte angebracht

und die Sensoren IWA 3 und 4 sowie IWA 5 und 6 befinden sich 87,5 cm links bzw. rechts von der Balkenmitte. Die vier faseroptischen Sensoren mit je sieben Messstellen wurden so angebracht, dass die mittlere Messstelle von jedem Sensor sich in der Balkenmitte befindet und von den übrigen sechs Messstellen jeweils drei links und rechts in einem Abstand von 25 cm, 50 cm und 75 cm liegen.



Abbildung 4: Belastungsversuch und Messeinrichtung an einem KHP-BSH-Hybridträger

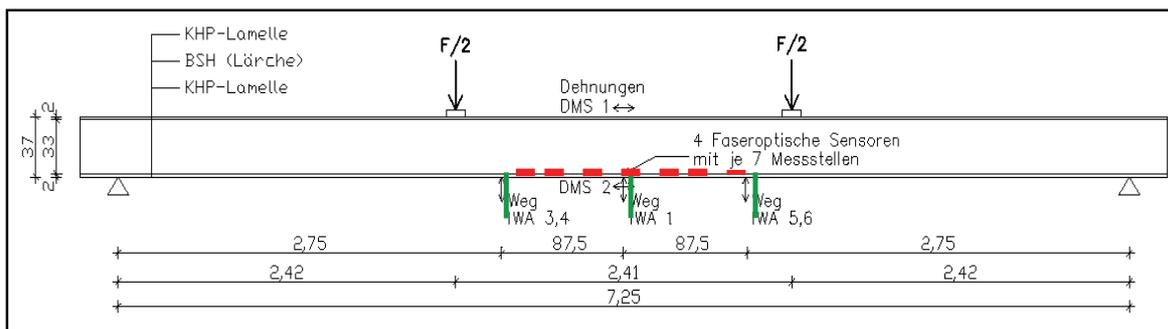


Abbildung 5: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Tabelle 1: Messwerte für Durchbiegungen und Krümmungen für ausgewählte Zeitpunkte an den Messpunkten

Zeitpunkt [s]	Durchbiegungen [cm]			Krümmungen [10^{-5} cm^{-1}]						
	IWA1 w_1	IWA3/4 w_2	IWA5/6 w_3	w_1''	w_2''	w_3''	w_4''	w_5''	w_6''	w_7''
1000	3,169	2,967	2,978	4,991	5,065	4,503	4,756	4,427	4,294	4,592
2146	3,814	3,6002	3,550	6,220	6,297	5,616	5,917	5,512	5,358	5,720
4000	3,713	3,463	3,494	5,963	6,036	5,378	5,678	5,277	5,129	5,473
4250	5,782	5,395	5,421	9,719	9,852	8,780	9,254	8,611	8,364	8,924
4500	3,840	3,586	3,614	6,192	6,278	5,593	5,894	5,489	5,333	5,685
4750	5,716	5,331	5,356	11,328	11,484	10,238	10,783	10,044	9,747	10,381

4.2 Ergebnisse

Für die verschiedenen Belastungszustände während des Biegeversuches wurden die gemessenen Durchbiegungen und Krümmungen durch eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten mit einem funktionalen Modell auf Grundlage der Sinus-Funktion ausgewertet. Es ist anzumerken, dass in dieser numerischen Untersuchung alle Messwerte als gleich genau und unkorreliert angenommen wurden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

Tabelle 2: Ergebnisse für die Auswertung der Messwert für unterschiedliche Belastungszustände

Zeitpunkt [s]	Unbekannte Parameter			$ V_0 / W_0 $ [10^{-5}]	Lagrange Multiplikator	Testgröße
	W_0	W_{Q_0}	V_0 [10^{-5}]		λ [10^{-4}]	λ / W_0 [10^{-4}]
1000	2,767	0,402	-5,195	1,8775	6,655	2,406
2146	3,364	0,450	-6,316	1,8775	8,187	2,434
4000	3,302	0,411	-6,200	1,8777	7,943	2,406
4250	5,266	0,516	-9,888	1,8777	12,805	2,432
4500	3,379	0,461	-6,345	1,8777	8,189	2,424
4750	5,245	0,471	-9,848	1,8776	13,804	2,632
2146	3,364	0,450	-6,316	1,8775	9,962	2,962

Betrachtet man die Ergebnisse für die unbekannt Parameter so fällt auf, dass W_{Q_0} sich annähernd konstant verhält und W_0 sowie V_0 sich zu unterschiedlichen Belastungszuständen deutlich ändern. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass zwischen diesen beiden unbekannt Parameter eine Abhängigkeit nach Gleichung (11) besteht und sie sich somit betragsmäßig nur um einem konstanten Faktor $(\pi/l)^2 \approx 1,8777 \cdot 10^{-5}$ unterscheiden dürfen, was durch die Werte in der fünften Spalte in Tabelle 2 bestätigt wird. Ebenso ändert sich der Lagrange-Multiplikator deutlich zu verschiedenen Zeitpunkten des Belastungsversuchs. Solange keine fehlerhaften Messwerte auftreten und sich der Balken bei unterschiedlichen Belastungszuständen nach dem gewählten mechanischen Modell verhält, muss auch hier gefordert werden, dass sich der Lagrange-Multiplikator und W_0 bzw. V_0 nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Die letzte Spalte der Tabelle enthält das Verhältnis zwischen Lagrange-Multiplikator und dem unbekannt Parameter W_0 und es zeigt sich, dass dieses Verhältnis von ungefähr $2,4 \cdot 10^{-4}$ annähernd konstant bei unterschiedlichen Belastungszuständen ist. Allerdings weicht das Verhältnis zum Zeitpunkt $t = 4750$ s etwas davon ab und es muss näher untersucht werden, ob diese Abweichung signifikant ist oder im Rahmen der Messgenauigkeit liegt. Die letzte Reihe der Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse für die Auswertung der Messwerte zum Zeitpunkt $t = 2146$ s, wobei die Krümmung w_4'' um den Faktor vier erhöht wurde, um eine Schädigung zu simulieren. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Änderung dieses Messwertes keine Auswirkung auf die Bestimmung der unbekannt Parameter hat und sich diese fiktive Schädigung nur auf den Lagrange-Multiplikator auswirkt. Das Verhältnis zwischen dem Lagrange-Multiplikator und W_0 ist mit 2,962 deutlich höher als das Verhältnis der originären Messwerte während des Belastungsversuchs.

5. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde mit der Analyse der Lagrange-Multiplikatoren (LM) aus der Ausgleichung aller Messwerte eine neue Methode für die Detektion von Strukturschädigungen vorgestellt. Für den Fall eines Vier-Punkte Biegeversuchs wurden das Grundkonzept der funktionalen Modellbildung sowie die resultierenden Ausgleichungsansätze vorgestellt. Anhand einer Überprüfung des Bruchverhaltens eines Verbundträgers konnte gezeigt werden, dass sich bei einem Bauteil ohne Schädigung die aus der Ausgleichung resultierenden Lagrange-Multiplikatoren nahezu gleich ergeben. Nach einer simulierten Schädigung des Bauteils konnte ein deutlich erhöhter Wert für den LM festgestellt werden, was ein Beleg für die grundsätzliche Einsatzfähigkeit der vorgeschlagenen Methode ist. Eine Erweiterung auf die integrierte Untersuchung einer Konstruktion mit mehreren Feldern ist problemlos möglich.

In weiterführenden Untersuchungen zur Datenanalyse ist zunächst ein stochastisches Modell für die Messwerte in der Ausgleichung zu berücksichtigen. Danach sind für jede Messwertgruppe grobe Fehler in den Messwerten zu identifizieren und zu eliminieren, um eine Verfälschung des Ergebnisses auszuschließen. Dann kann die integrierte Auswertung aller Messwerte unter Berücksichtigung der inneren Koppelung erfolgen. Danach sind die in der Ausgleichungsrechnung etablierten Kenngrößen zur Beurteilung von Genauigkeit und Zuverlässigkeit zu berechnen und zu interpretieren. Im Anschluss daran kann die Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren erfolgen, wobei auch an dieser Stelle ein geeigneter Test zu implementieren ist, um eine statistisch gesicherte Aussage zu erhalten. Auf dem Gebiet der Messwerterfassung ist zu untersuchen, welche Sensoren sich besonders für die Schadenserkenkung mit der vorgestellten Methode eignen und wo diese bezüglich des Untersuchungsobjekts zu positionieren sind.

Literatur

- Ahlborn, T. M, Shuchman, R., Sutter, L.L., Brooks, C.N., Harris, D.K., Burns, J.W., Endsley, K.A., Evans, D.C., Vaghefi, K., Oats, R.C. (2010a): The State-of-the-Practice of Modern Structural Health Monitoring for Bridges: A Comprehensive Review. Michigan Tech, Download unter [http://mtri.org/bridgecondition/doc/State-of-PracticeSHMforBridges\(July2010\).pdf](http://mtri.org/bridgecondition/doc/State-of-PracticeSHMforBridges(July2010).pdf), Zugriff am 18.02.2012.
- Ahlborn, T. M, Shuchman, R., Sutter, L.L., Brooks, C.N., Harris, D.K., Burns, J.W., Endsley, K.A., Evans, D.C., Vaghefi, K., Oats, R.C. (2010b): An Evaluation of Commercially Available Remote Sensors for Assessing Highway Bridge Condition. Michigan Tech, Download unter http://mtri.org/bridgecondition/doc/RITA_BCRS_Commercial_Sensor_Evaluation.pdf, Zugriff am 18.02.2012.
- Brandes, K., Daum, W. (2008): Langzeit-Monitoring an den Spannbetonbrücken des neuen Hauptbahnhofs Berlin. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN) 115, 21-28.
- Buchhardt, F., Brandes, K. (2009): Methodische Zusammenführung von Strukturanalyse und Messung. Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), Berlin, Forschungsbericht 286.
- Falk, S. (1963): Das Verfahren von Rayleigh-Ritz mit hermiteschen Interpolationspolynomen. ZAMM 43, 149-166.
- Farrar, C. R., Jauregui, D. A. (1998): Comparative study of damage identification algorithms applied to a bridge: I. Experiment. Smart. Mater. Struct. (7), 704-719.
- Gauss, C.F. (1887): Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. Physica-Verlag Würzburg, Neudruck, 1964.
- Gründig, L. (1975): Die Berechnung vorgespannter Seil- und Hängernetze unter Berücksichtigung ihrer topologischen und physikalischen Eigenschaften und der Ausgleichsrechnung. In: SFB 64, Mitteilungen 34.
- Gummert, P., Reckling, K.-A. (1994): Mechanik. 3. Aufl., Vieweg Verlag, Braunschweig / Wiesbaden.
- Karabulut, H. (2006): The physical meaning of Lagrange multipliers. Eur. J. Phys. 27, 709-718.
- Kistner, K.-P. (1993): Produktions- und Kostentheorie. 2. Aufl., Physica-Verlag, Heidelberg.
- Neitzel, F. (2010): Ausgleichsrechnung – Modellbildung. Qualitätsmanagement geodätischer Mess- und Auswerteverfahren. Schriftenreihe des DVW, Band 61, 95-127.
- Niemeier, W. (2008): Ausgleichung. Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Schek, H.J. (1974): The Force Densities Method for Form Finding and Computation of General Networks. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (3), 115–134.
- Silvey, S. D. (1959): The Lagrangian Multiplier Test. The Annals of Mathematical Statistics (30), No. 2, 389-407.
- Singer, P. (1995): Die Berechnung von Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus aus geodätischer Sicht. Dissertation, Universität Stuttgart.
- Szabo, I. (1964): Einführung in die Technische Mechanik, 6. Aufl., Springer, Berlin u.a.
- Untergutsch, A., Brandes, K. (2011): Monitoring zur Strukturschädigung: Detektierung mittels Lagrange Multiplikator Test. 6. Symp. Experimentelle Untersuchungen von Baukonstruktionen, Dresden, Sept. 2011. Hrsg.: Curbach, M., Opitz, H., Scheerer, S. und Hampel, T.
- Wenzel, H., Pichler, D. (2005): Ambient Vibration Monitoring. John Wiley & sons, Ltd, Chichester.
- Wenzel, H. (2010): Bauwerksüberwachung bei bestehenden Brückenbauwerken durch BRIMOS. Messen im Bauwesen 2010, Tagungsbeitrag. Download unter http://www.vce.at/pdf/downloads/Publications/Messen_im_Bauwesen.pdf, Zugriff am 18.02.2012.
- Wziontek, H., Wienholz, K., Lelgemann, D. (2001): On the interpretation of lagrange's multipliers as a measure of constraint in adjustment problems. Proceedings of the Fourth International Symposium „Turkish-German Joint Geodetic Days“, Berlin, April 3-6, 2001. TU Berlin, 777-783.