

Untersuchung der Kopplungsstärke ko-resonanter Cantilever-Systeme

Nynne Edeler¹, Ioannis Lampouras¹ und Julia Körmer¹

¹Institut für Materialien und Bauelemente der Elektronik, Leibniz Universität Hannover, Hannover, Deutschland

Kontakt: koerner@mbe.uni-hannover.de

Einleitung

Ko-resonant gekoppelte Cantilever-Systeme zeichnen sich durch die mechanische Kopplung und Eigenfrequenzanpassung zweier sehr unterschiedlicher Schwinger (Abmessungen, Materialien) aus, z.B. eines Mikro- und eines Nanocantilevers. Im so entstehenden ko-resonanten Zustand beeinflusst eine äußere Interaktion (z.B. Massebelastung, Kraftwirkung) am empfindlichen Nanocantilever den Schwingungszustand des Gesamtsystems, welcher mit etablierten Methoden am Mikrocantilever ausgelesen werden kann [1,2]. Hierdurch wird für Sensoranwendungen eine Steigerung der Empfindlichkeit um mehrere Größenordnungen erreicht [2-4].

Nach bisherigem Forschungsstand wurde davon ausgegangen, dass ko-Resonanz prinzipiell auftritt, sobald sich die Eigenfrequenzen der ersten Biegemoden der beiden Schwinger um weniger als 20 % unterscheiden [5,6]. In Experimenten hat sich jedoch gezeigt, dass die Systeme auch innerhalb dieses Bereiches ein deutlich differenziertes Verhalten aufweisen und die erwarteten Sensoreigenschaften insbesondere von den Verhältnissen der Abmessungen beider Cantilever abhängen. Für eine praktischen Sensorentwurf ist es deshalb von essentieller Bedeutung, ein genaueres Verständnis dieser Zusammenhänge zu entwickeln.

Die hier vorgestellte Arbeit hat die folgenden Ziele: (i) Bestimmung von quantifizierbaren Charakteristika für ko-Resonanz und Ableiten einer potentiell verallgemeinerbaren Definition und (ii) Ermittlung von Rahmenbedingungen der Abmessungen und geometrischen Verhältnisse, welche die beiden Cantilever zur Ausbildung eines ko-resonanten Zustandes erfüllen müssen.

Methoden und Materialien

Systemmodellierung

Um den Zusammenhang zwischen den Abmessungen und Federkonstanten der beiden Cantilever im Hinblick auf die Frequenzanpassung und das sich einstellende ko-resonante Verhalten zu untersuchen, wurden umfangreiche Simulationen mit der Software *Comsol Multiphysics*, unterstützt mit *Matlab* und der Schaltungssimulationssoftware *LTSPice*, durchgeführt.

Abb. 1 zeigt ein beispielhaftes *Comsol*-Modell sowie einen simulierten Amplitudenfrequenzgang für den Mikrocantilever im Falle perfekter Eigenfrequenzanpassung zur Definition der relevanten Resonanzfrequenzen des gekoppelten Systems.

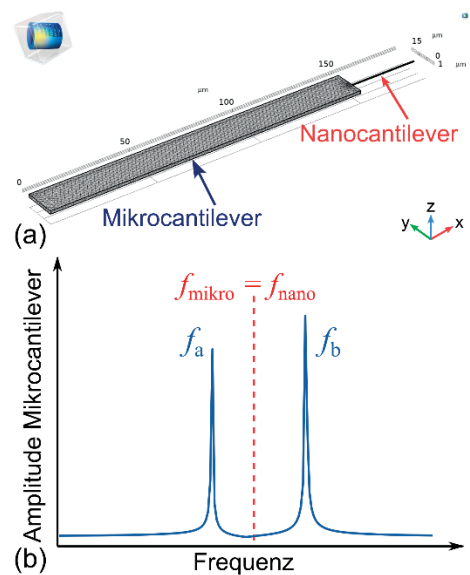


Abb. 1: (a) *Comsol*-Simulationsmodell (mit Vernetzung); (b) Veranschaulichung der im System auftretenden relevanten Frequenzen des gekoppelten Systems (f_a, f_b) an einem beispielhaften simulierten Amplitudenfrequenzgang.

Für die Simulation wurde Silizium als Material für beide Cantilever zu Grunde gelegt, um einen Vergleich und eine Validierung des Simulationsmodells mit experimentell untersuchten Systemen zu ermöglichen. Die relevanten Materialparameter sind: Dichte $\rho = 2329 \text{ kg/m}^3$, Elastizitätsmodul $E = 170 \text{ GPa}$ und Poisson-Zahl $\nu = 0,28$.

Für die Simulation wurden zunächst feste Abmessungen für den Mikrocantilever definiert, die sich ebenfalls an experimentell untersuchten Systemen orientieren. Für den Nanocantilever wurden die Abmessungen variiert, so dass sich verschiedene Eigenfrequenzanpassungsgrade zwischen Mikro- und Nanocantilever ergaben. Dabei wurden die Breite W_{nano} und Dicke T_{nano} des Nanocantilevers jeweils durch ein Verhältnis zum Mikrocantilever festgelegt ($W_{\text{nano}}/W_{\text{mikro}}$ bzw. $T_{\text{nano}}/T_{\text{mikro}}$) und für diese Verhältnisse die Länge L_{nano} variiert.

Schlussendlich können aus den Abmessungen eines jeden Cantilevers dessen Federkonstante k und Eigenfrequenz f berechnet werden:

$$k = \frac{E}{4} \cdot W \cdot \left(\frac{T}{L}\right)^3 \quad (1)$$

$$f = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{T}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

Dabei sind L , W und T die Geometrieparameter Länge, Breite und Dicke des Cantilevers, sowie E und ρ die zuvor genannten Materialparameter. Für beide Cantilever wurde ein rechteckiger Querschnitt zu Grunde gelegt.

In Tabelle 1 sind die Abmessungen und Federkonstanten der untersuchten Mikrocantilever zusammengefasst. Weiterhin ist die Anzahl der betrachteten zugehörigen Nanocantilever angegeben.

Der Mikrocantilever in Zeile 1 wurde als Standardsystem am umfassendsten untersucht, da hierzu das Verhalten des realen Systems sehr gut bekannt ist. Für die Werte in den Zeilen 2 bis 5 wurden zunächst kleine Änderungen des Mikrocantilevers (Längen von 150 μm und 111 μm) und schlussendlich Extremwerte von sehr kurzen (50 μm) und sehr langen (1000 μm) Balken betrachtet. Insbesondere die Extrema dienen dazu, die Verallgemeinerbarkeit der abgeleiteten Hypothesen für die Bedingung des ko-resonanten Zustandes zu prüfen.

Tab. 1: Übersicht der simulierten Systeme: L_{mikro} , W_{mikro} , T_{mikro} und k_{mikro} repräsentieren die Länge, Breite, Dicke und Federkonstante des Mikrocantilevers. In der letzten Spalte ist die Anzahl berechneter Nanocantilever zum jeweiligen Mikrocantilever angegeben. Dabei wurden die Abmessungen des Nanocantilevers variiert, um verschiedene Eigenfrequenzen (und Anpassungsgrade) sowie Federkonstanten zu erhalten.

L_{mikro} (μm)	W_{mikro} (μm)	T_{mikro} (μm)	k_{mikro} (N/m)	Anzahl Nano
200	20	2	0,850	51
150	15	1,5	0,638	2
111	40	1	1,243	3
50	15	1,5	17,213	1
1000	100	10	4,250	1

Untersuchte Kenngrößen

Folgende Parameter wurden zur Auswertung der Simulationsergebnisse herangezogen:

- Federkonstante des Nanocantilevers k_{nano}
- Federkonstantenverhältnis $k_{\text{nano}}/k_{\text{mikro}}$
- Amplitudenverstärkung zwischen den freien Enden von Mikro- und Nanocantilever:

$$\Lambda = 20 \cdot \log_{10} \frac{A_{\text{max,nano}}}{A_{\text{max,mikro}}} \quad (3)$$

- Anpassungsgrad der Eigenfrequenzen:

$$\Delta f = (f_{\text{nano}} - f_{\text{mikro}})/f_{\text{mikro}} \quad (4)$$

- Effektive Federkonstanten $k_{\text{eff,a}}$ und $k_{\text{eff,b}}$ der beiden Resonanzpeaks des gekoppelten Systems (d.h. für f_a und f_b):

$$k_{\text{eff}}^{a,b} = \frac{k_3}{2} \cdot \frac{\omega_{a,b}|_{k_3=0}}{\Delta\omega_{a,b}} \quad (5)$$

Details zur Bestimmung und Bedeutung der effektiven Federkonstanten, sowie die Herleitung von Gleichung (5) sind in [6] beschrieben.

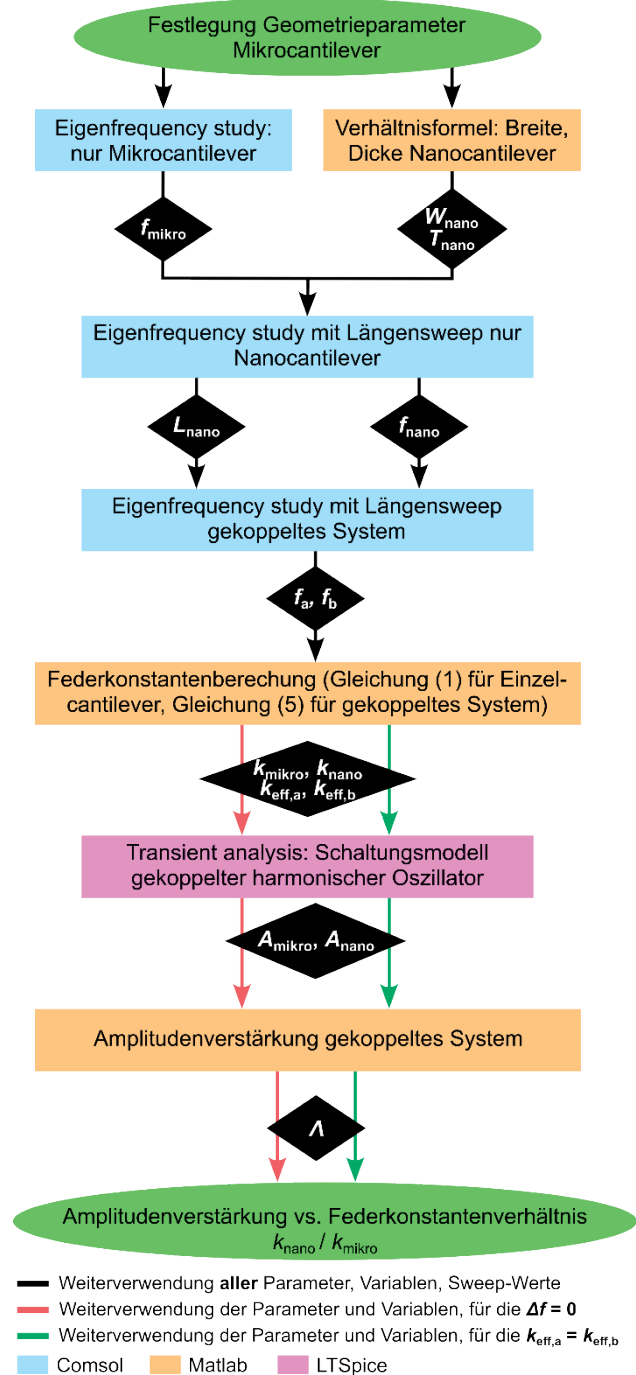


Abb. 2: Ablaufplan für die Simulation der ko-resonanten Systeme mittels der Tools *Comsol* (blau), *Matlab* (orange) und *LTSpice* (pink). Die relevanten übertragenen Parameter und Größen sind in den schwarzen Boxen eingetragen.

Zur Definition des ko-resonanten Zustandes wird k_{nano} für **zwei Bedingungen** bestimmt:

Bed. 1: $\Delta f = 0$, d.h. $f_{\text{mikro}} = f_{\text{nano}}$

Bed. 2: $k_{\text{eff,a}} = k_{\text{eff,b}}$

Dies bildet die Grundlage für die Auswertung und Interpretation der Simulationsdaten.

Simulationsablauf

Der Simulationsablauf ist in Abb. 2 dargestellt. Die Parameterstudien und eigentlichen Simulationen wurden mit *Comsol* durchgeführt. Zur Bestimmung von Zwischengrößen (Abmessungen des Nanocantilevers, Federkonstanten) und zur graphischen Aufbereitung der Ergebnisse wurden die Simulationsergebnisse nach *Matlab* exportiert und dort weiterverarbeitet. Für die Berechnung der entsprechenden Größen wurden Skripte für Gleichung (1) bis (5) verfasst, sowie die Berechnungen aus [6] für die Bestimmung der effektiven Federkonstanten verwendet.

Zur Ermittlung der Amplitudenverstärkung der Cantilever wurden diese anhand ihrer Kenngrößen Federkonstante und effektive Masse in ein gekoppeltes harmonisches Oszillatormodell überführt, welches als elektrische Schaltung sehr effizient in *LTSpice* berechnet werden kann. Die entsprechenden Transformationen und die Validität des Ansatzes sind in [7] ausführlich beschrieben.

Dieser Weg zur Ermittlung der Amplitudenverstärkung wurde gewählt, da eine zeitharmonische Analyse des Schwingungsverhaltens in *Comsol* sehr zeit- und rechenaufwändig ist (bis zu mehrere Tage vs. wenige Minuten in *LTSpice*).

Ergebnisse

Abbildung 3 zeigt die Amplitudenverstärkung als Funktion des Verhältnisses der Federkonstanten von Mikro- und Nanocantilever für alle in Tabelle 1 aufgeführten 58 gekoppelten Systeme.

Wie aus Abbildung 1 ersichtlich ist, besitzt ein gekoppeltes System immer zwei Resonanzfrequenzen und die Abbildung 3 dargestellten Ergebnisse wurden bei Anregung des Systems mit f_a ermittelt. Für die Anregung mit f_b ergibt sich jedoch der gleiche Verlauf und die Klassifizierung des gekoppelten Zustandes.

Diskussion

Um zu bestimmen, welche Abmessungen von Mikro- und Nanocantilever schlussendlich zu einem ko-resonanten Zustand führen, müssen zunächst Kriterien für die ko-Resonanz definiert werden. Eine solche Definition ist bisher in der Literatur nicht vorhanden, so dass wir hier erstmalig eine festlegen. Diese setzt sich aus **zwei Teilen** zusammen:

1. Das praktisch relevante und überprüfbare Kriterium der Amplitudenverstärkung: Ein ko-resonantes Verhalten in einem gekoppelten Cantilever-System liegt dann vor, wenn die Amplitudenverstärkung zwischen den freien Enden von Mikro- und Nanocantilever

deutlich größer ist, als die Amplitudenverstärkung eines Balkens, dessen Länge ($L_{\text{mikro}} + L_{\text{nano}}$) beträgt und auf dem die Amplituden an zwei Punkten verglichen werden, die räumlich der Position vom freien Ende von Mikro- und Nanocantilever entsprechen. Die Amplitudenverstärkung des entsprechenden Einzelbalkens wurde mit der Euler-Bernoulli-Theorie berechnet [8].

2. Die Erfüllung der beiden Bedingungen **Bed. 1** und **Bed. 2** aus dem Abschnitt *Untersuchte Kenngrößen*: Diese können entweder für dasselbe oder für unterschiedliche Werte von k_{nano} erfüllt sein. Eindeutig ko-resonantes Verhalten liegt nur dann vor, wenn eine Erfüllung für dasselbe k_{nano} gegeben ist.

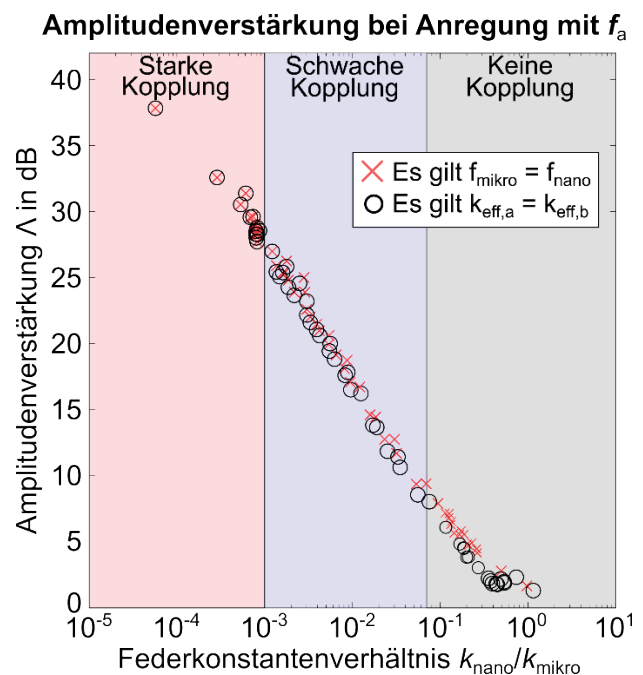


Abb. 3: Einteilung ko-resonanter gekoppelter Systeme anhand der Amplitudenverstärkung Λ und dem Federkonstantenverhältnis von Mikro- zu Nanocantilever ($k_{\text{nano}}/k_{\text{mikro}}$). Zu Grunde gelegt wurde die Anregung des Systems mit der gekoppelten Resonanzfrequenz f_a .

Ausgehend von diesen beiden Teilen kann eine Einteilung von ko-resonanten Cantilever-Systemen nach der Kopplungsstärke vorgenommen werden, die in Abbildung 3 durch die farblich abgesetzten Bereiche dargestellt ist. Der gegebenen Definition folgend lassen sich folgende Zustände festlegen:

Starke ko-resonante Kopplung

Dieser Fall liegt vor, wenn:

- Bed.1 und Bed. 2 für **dasselbe** k_{nano} erfüllt sind **UND**
- die Amplitudenverstärkung $\Lambda > 28$ dB beträgt.

Dies gilt für gekoppelte Systeme mit:

$$k_{\text{nano}} \leq 0,001 \cdot k_{\text{mikro}}$$

Dabei sind bei (a) kleine Variationen erlaubt, d.h. $\Delta f = (0 - 0,022) \%$ und $(k_{\text{eff,a}} - k_{\text{eff,b}}) \leq 2 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}$.

Keine ko-resonante Kopplung

Dieser Fall liegt vor, wenn:

- (a) Bed. 1 und 2 ausschließlich für **unterschiedliche k_{nano}** erfüllt sind **UND**
- (b) die Amplitudenverstärkung **$\Lambda < 9,35 \text{ dB}$** ist. In diesem Fall ist die Amplitudenverstärkung des gekoppelten Systems nicht größer als die von den beiden Punkten des oben beschriebenen Einzelbalkens.

Dies gilt für gekoppelte Systeme mit:

$$k_{\text{nano}} > 0,07 \cdot k_{\text{mikro}}$$

Hierbei ist es auch möglich, dass Bed. 2 niemals erfüllt wird, da keine Gleichheit der effektiven Federkonstanten erreicht wird.

Schwache ko-resonante Kopplung

Zwischen diesen beiden Fällen kann ein Übergangsbereich definiert werden, für welchen gilt:

- (a) Bed. 1 und Bed. 2 sind **entweder für dasselbe oder für verschiedene k_{nano}** erfüllt, wobei bei Verschiedenheit $\Delta k_{\text{nano}} < 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ betragen muss **UND**
- (b) eine moderate Amplitudenverstärkung von **$9,35 \text{ dB} < \Lambda < 28 \text{ dB}$** auftritt.

Mit diesen Betrachtungen wird es erstmals möglich, ko-resonant gekoppelte Cantilever-Systeme anhand ihrer Kopplungsstärke zu klassifizieren. Hierbei basieren die ermittelten (Grenz)bedingungen nicht auf den einzelnen Geometrieparametern der Cantilever, sondern auf deren Federkonstanten. Somit liegt eine verallgemeinerbare Figure-of-Merit vor, denn es ist unerheblich, wie die Federkonstante zustande kommt, d.h. ob es sich um einen besonders langen und dafür dicken, oder einen sehr dünnen und kurzen Balken handelt. Entscheidend für die Klassifizierung eines gekoppelten Systems und die Vorhersage der praktischen relevanten Ausprägung des ko-resonanten Zustandes ist letztendlich nur das Verhältnis der Federkonstanten beider Schwinger.

Um diese Verallgemeinerbarkeit zu prüfen, wurden die beiden Extrem-Systeme (Zeilen 4 und 5 in Tabelle 1) betrachtet und es hat sich gezeigt, dass deren Datenpunkte ebenfalls der beschriebenen Klassifizierung folgen. In der Zukunft soll dies noch durch umfangreichere Analysen weiterer Systeme und insbesondere für weitere Materialien untersucht werden. Nach aktuellem Erkenntnisstand kann eine Materialabhängigkeit der Kopplungsstärke und damit der Einteilung der Systeme nicht ausgeschlossen werden.

Die bisherigen Studien liefern aber einen entscheidenden ersten Schritt zur Einteilung und Klassifizierung von ko-resonant gekoppelten Cantilever-

Systemen und damit für das Sensor-Design und die Vorhersage entsprechender praktisch relevanter Sensorparameter.

Literatur

- [1] C. F. Reiche et al., Introduction of a co-resonant detection concept for mechanical oscillation-based sensors, *Nanotechnology* (2015), 26, 335501, DOI: 10.1088/0957-4484/26/33/335501
- [2] J. Körner, A highly sensitive co-resonant cantilever sensor for materials research: Application to nanomaterial characterization, *Journal of Materials Research* (2016), 33, 2504; DOI: 10.1557/jmr.2018.295
- [3] J. Körner et al., Signal enhancement in cantilever magnetometry based on a co-resonantly coupled sensor, *Beilstein Journal of Nanotechnology* (2016), 7, 1033, DOI: 10.3762/bjnano.7.96
- [4] J. Körner et al., Magnetic properties of individual Co_2FeGa Heusler nanoparticles studied at room temperature by a highly sensitive co-resonant cantilever sensor, *Scientific Reports* (2017), 7, 8881, DOI: 10.1038/s41598-017-08340-z
- [5] I. Lampouras et al., Precisely controlled batch-fabrication of highly sensitive co-resonant cantilever sensors from silicon-nitride, *Journal of Micromechanics and Microengineering* (2024), 34, 015005, DOI: 10.1088/1361-6439/ad0d80
- [6] J. Körner, Effective sensor properties and sensitivity considerations of a dynamic co-resonantly coupled cantilever sensor, *Beilstein Journal of Nanotechnology* (2018), 9, 2546, DOI: 10.3762/bjnano.9.237
- [7] J. Körner et al., Employing electro-mechanical analogies for co-resonantly coupled cantilever sensors, *Journal of Sensors and Sensor Systems* (2016), 5, 242, DOI: 10.5194/jsss-5-245-2016
- [8] L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations*. McGraw-Hill higher education, McGraw-Hill, 2001

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung dieser Arbeit (KO5508/3-1; KO5508/3-2).