

Quantitative Analyse von Störungen der Periodizität in strukturierten Materialien mittels breitbandiger geführter Wellen

Mareen Wippermann¹, Jonas Hölscher¹, Leander Claes¹

¹ Universität Paderborn, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Deutschland

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Methode zur Bestimmung der Struktureigenschaften periodischer Materialien mithilfe breitbandiger Ultraschallwellen vorgestellt. Materialien mit periodischen elastischen Eigenschaften, wie gewebeverstärkte Kunststoffe, deren Gewebestruktur maßgeblich die mechanischen Eigenschaften beeinflusst, sind aufgrund ihrer hohen Steifigkeit bei geringer Masse in industriellen Anwendungen von großer Bedeutung. Da die Gewebestruktur durch Umformprozesse beeinflusst werden kann, wird in dieser Arbeit eine quantitative Analyse von Störungen der Periodizität in strukturierten Materialien durchgeführt. Es werden Modellproben aus homogenen Polyamid 6 Platten hergestellt, in die nachträglich definierte Strukturen eingebracht werden. Untersucht werden sowohl Modellproben mit ungestörter Periodizität als Referenzsystem als auch Modellproben mit lokal gestörter Periodizität, um die Auswirkungen von Defekten auf das disperse Verhalten systematisch zu analysieren. Zur Auswertung werden wiederholt auftretende Moden im Wellenzahlbereich mittels Autokorrelation untersucht. Dabei zeigt sich erwartungsgemäß, dass periodische Effekte im Wellenzahlbereich durch eine Störung der Periodizität in der Struktur der Probe geschwächt werden. Die Höhe des ersten Nebenmaximums quantifiziert die Stärke der periodischen Selbstähnlichkeit, während die Halbwertsbreite Variationen in der Korrelationslänge und damit in der räumlichen Struktur charakterisiert. Die Ergebnisse zeigen, dass die Methode geeignet ist, die Ausprägung von Störungen in Bauteilen mit periodischen Strukturen zu bewerten. Zudem ermöglicht sie eine quantitative Auswertung, sodass Unterschiede zwischen ungestörten und lokal gestörten Proben messbar werden.

Keywords: Faserverbundkunststoffe, Periodizität, geführte Wellen, Störungen von Periodizität, strukturierte Materialien

Motivation

Faserverbundkunststoffe werden in einer Vielzahl industrieller Anwendungen eingesetzt, da sie eine hohe mechanische Steifigkeit bei geringer Masse aufweisen. Zudem können die mechanischen Eigenschaften durch die gezielte Auswahl von Parametern wie dem Material der Faser und der Kunststoffmatrix, der Art des Gewebes, und der Anzahl der Lagen beeinflusst werden. Die flexible Auslegung der faserverstärkten Kunststoffe ermöglicht den Einsatz für spezifische industrielle Anwendungen, insbesondere in der Luft- und Raumfahrttechnik und im Automobil. Ein weiterer Einflussfaktor auf die resultierenden Eigenschaften eines faserverstärkten Kunststoffes ist die Geometrie des Fasergewebes. Die Art des Gewebes ist dabei von entscheidender Bedeutung [1]. Leinwandbindung und Köperbindung sind jeweils orthogonale Bindungsarten mit quadratischen Einheitszellen und unterscheiden sich in der Anzahl der Fasern, die in die jeweilige Richtung gekreuzt werden. Bei der Leinwandbindung

wird jeweils ein Faserbündel gekreuzt, bei der 2/2-Köperbindung hingegen in beide Richtungen zwei Faserbündel. Eine Einheitszelle beschreibt dabei die kleinst mögliche Wiederholeinheit einer in diesem Fall zweidimensionalen periodischen Struktur.

Abgesehen von vorbestimmten produktionsbedingten Unterschieden in den Geometrien der Einheitszelle besteht die Möglichkeit, dass die Geometrie auch durch Fehler im Herstellungsprozess oder durch eine Weiterverarbeitung beeinflusst werden kann. Die vorliegende Untersuchung ist motiviert durch die Umformung eines faserverstärkten Kunststoffes, aus der eine lokale Stauchung bzw. Dehnung der periodischen Struktur des Materials resultiert. Dies kann signifikante Auswirkungen auf die mechanischen Eigenschaften des Materials haben [1]. Darüber hinaus sind Fehlerfälle im Herstellungsprozess denkbar, bei denen das Gewebe beispielsweise verzogen ist. Aufbauend auf den genannten prozess- und anwendungsnahen Beispielen sollen lokale Störun-

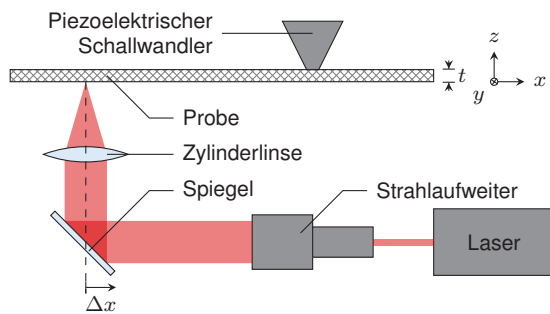


Abb. 1: Experimenteller Aufbau zur Anregung und Detektion breitbandiger Ultraschallwellen in plattenförmigen Proben [2].

gen der periodischen Struktur in Materialien untersucht werden. Für die Untersuchung und quantitative Analyse einer vorliegenden Störung der Periodizität werden Modellproben hergestellt und untersucht. Dabei handelt es sich um homogene Proben, in die periodische Strukturen mit definierten Störungen eingebracht werden. Untersuchungen auf Basis breitbandiger akustischer Wellen, ermöglichen eine Bewertung der Periodizität in Bezug auf eine Referenz. Das langfristige Ziel ist es, den Einfluss von Störungen in der Gewebestruktur eines faserverstärkten Kunststoffes zu quantifizieren, um daraus Rückschlüsse auf die mechanischen Eigenschaften der Materialien ziehen zu können.

Experimenteller Aufbau

Der in Abbildung 1 dargestellte Experimentalaufbau wird zur Untersuchung plattenförmiger Proben als akustischer Wellenleiter mittels breitbandiger Ultraschallwellen verwendet [2]. Die gepulste infrarote Laserstrahlung (FLARE NX 1030, Coherent) mit einer Pulslänge von $1,5 \text{ ns}$ und einer Pulsenergie von etwa $500 \mu\text{J}$ wird zunächst aufgeweitet, anschließend mittels eines Spiegels umgelenkt und schließlich durch eine Zylinderlinse auf die Probe fokussiert. Die pulsformige Erwärmung der Probe durch die Laserstrahlung und die darauffolgende Ausdehnung im Material resultieren in breitbandigen Ultraschallwellen, welche durch die Probe propagieren. Die angeregten Ultraschallwellen werden durch einen piezoelektrischen Schallwandler detektiert. Im Schallwandler wird eine streifenförmige Piezokeramik als aktives Element eingesetzt (PIC255, PI Ceramic) [3]. Eine örtliche Variation der Anregung entlang der x -Achse ermöglicht die Erfassung eines zweidimensionalen Datensatzes, welcher sowohl eine zeitliche Auflösung t als auch eine räumliche Auflösung x aufweist. Abbildung 2 zeigt die Messergebnisse im Zeit- und Ortsbereich für eine Probe mit drei Lagen Leinwandbindung aus

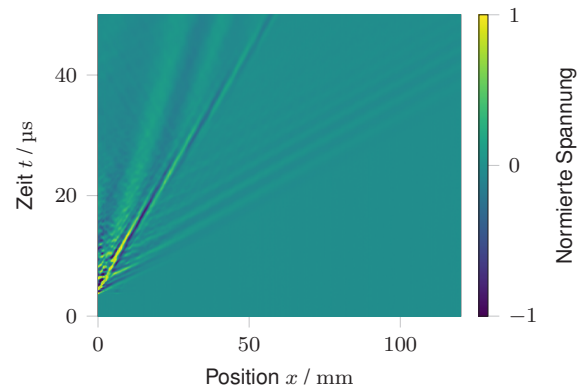


Abb. 2: Messdaten einer Probe mit drei Lagen Leinwandbindung aus Glasfasern, eingebettet in Polyamid 6, aufgenommen mit dem experimentellen Aufbau aus Abbildung 1.

Glasfasern, eingebettet in eine Matrix aus Polyamid 6. Für diese Messung werden 750 Positionen mit einer Schrittweite von $100 \mu\text{m}$ vermessen. Zur Datenverarbeitung wird im Ortsbereich der Offset entfernt und durch Zero-Padding die effektive Auflösung erhöht. Zur Minimierung des Leakage-Effekts wird ein Hann-Fenster angewendet. Mittels der zweidimensionalen Fourier-Transformation kann dieser verarbeitete Datensatz in den Frequenz-Wellenzahlbereich transformiert werden [4]. In Abbildung 3 ist der Betrag der Fourier-Transformierten dargestellt, in dem ausbreitende Moden als Grate sichtbar werden. Dabei werden zwei Quadranten der Fourier-Transformierten überlagert, um Moden mit sowohl positiver als auch negativer Gruppengeschwindigkeit darzustellen. Abschließend wird eine potenzierte Arcus-Tangens-Funktion angewendet, die einer Bildkompression entspricht und die Bilddaten normiert [5]. Mithilfe des vorgestellten Experimentalaufbaus ist es möglich, das dispersive Verhalten plattenförmiger Proben zu analysieren.

Bestimmung der Strukturgröße

Abbildung 3 zeigt Messdaten eines faserverstärkten Kunststoffes (drei Lagen Leinwandbindung aus Glasfasern, Polyamid 6 Matrix). Die Grate in der Darstellung repräsentieren die ausbreitungsfähigen Moden. In diesem Fall sind die A0- und S0-Mode sichtbar. Im Vergleich zu Messungen an einer homogenen Probe sind äquidistanten Wiederholungen im Wellenzahlbereich, insbesondere der A0-Mode, auffällig. Die periodischen Strukturen der vorliegenden Faserverbundkunststoffe lassen sich mathematisch mithilfe periodisch modulierter Materialparameter im Ortsbereich beschreiben. Dieser Ansatz ist analog zum Bloch-

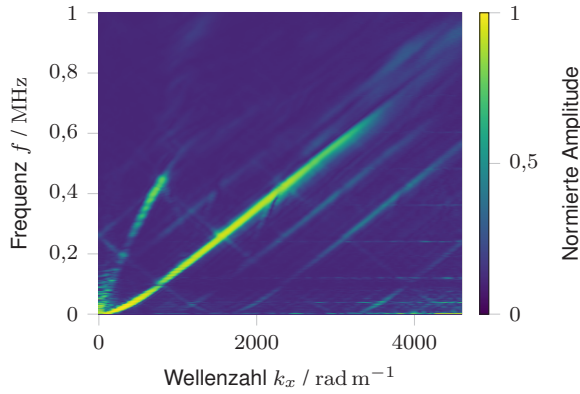


Abb. 3: Der Betrag der zweidimensionalen Fourier-Transformation der Messdaten (siehe Abbildung 2) visualisiert die dispersiven Eigenschaften der vorliegenden Probe. Aus der periodischen Struktur der Probe resultieren Wiederholungen der Moden im Wellenzahlbereich.

Theorem in der Festkörperphysik, das das Verhalten von Elektronen in periodischen Kristallgittern beschreibt [6] und einen Spezialfall des Floquet-Theorems [7] darstellt. Durch die Übertragung dieses Theorems können die vorliegenden periodischen Strukturen (Faserverbundkunststoffe) als phononische Kristalle modelliert werden [8]. Da ein eingeschwungener Zustand betrachtet wird, ergibt sich aus der Periodizität der strukturierten Proben mithilfe des Bloch-Theorems eine Periodizität im Wellenzahlbereich.

Charakterisiert werden die Wiederholungen über die Distanz Δk_x im Wellenzahlbereich (vgl. Abbildung 3). Aus dem Abstand Δk_x kann auf die Größe a der Einheitszelle im Ortsbereich, das heißt auf die Strukturgröße des Gewebes, rückgeschlossen werden. Der reziproke Zusammenhang aus Gleichung 1 ermöglicht, ohne vollständige Rücktransformation in den Ortsbereich, die Bestimmung der Länge a der Einheitszelle in x -Richtung [9].

$$a = \frac{2\pi}{\Delta k_x} \quad (1)$$

Für eine robuste quantitative Bestimmung der Strukturgröße a der Einheitszelle, wird die Autokorrelationsfunktion der Messdaten (Abbildung 3) in Richtung der Wellenzahl k_x berechnet (siehe Abbildung 4), sodass hohe Intensitäten (hier vertikale Linien) der normierten Autokorrelationsfunktion $\Phi(\Delta k_x)$ Wiederholungen repräsentieren. In einem weiteren Verarbeitungsschritt wird die Autokorrelationsfunktion $\Phi(\Delta k_x)$ über die Frequenz gemittelt, sodass in $\bar{\Phi}(\Delta k_x)$ jedes Maximum eine Wiederholung im Wellenzahlbereich repräsentiert.

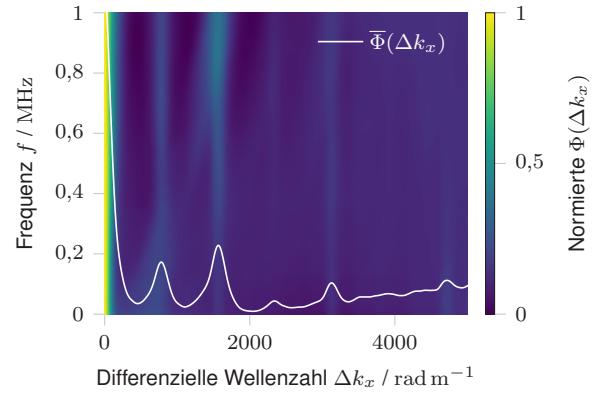


Abb. 4: Autokorrelationsfunktion der Messdaten aus Abbildung 3 berechnet in Richtung der Wellenzahl k_x . Über die Frequenz gemittelte Autokorrelationsfunktion $\bar{\Phi}(\Delta k_x)$ in weiß.

In Abbildung 4 ist die gemittelte Autokorrelationsfunktion $\bar{\Phi}(\Delta k_x)$ der zuvor erwähnten Probe mit Leinwandbindung (siehe Abbildung 3) gezeigt. Diese Methode zur Bestimmung der Größe einer Einheitszelle, also der Strukturgröße in eine Raumrichtung (Messrichtung, hier x -Richtung) wurde an unterschiedlichen faserverstärkten Kunststoffen evaluiert [10]. Die Proben unterscheiden sich in Bindungsart, Faser- und Matrixmaterial oder Anzahl der Lagen. Außerdem kann das Verfahren dahingehend erweitert werden, dass die Propagationsrichtung der geführten Wellen in der Platte variiert und eine winkelabhängig Darstellung ermöglicht wird, welche neben der Größe auch die Geometrie der Einheitszelle sichtbar macht [11].

Modellproben

In der vorliegenden Arbeit werden Modellproben untersucht. Sie dienen als Grundlage, um in Zukunft Fehlstellen in der Struktur von faserverstärkten Kunststoffen zu analysieren. Durch die gezielte Herstellung definierter Störungen wird es ermöglicht, deren Einfluss auf das disperse Verhalten systematisch zu charakterisieren und entsprechende Erwartungshaltungen abzuleiten. Die Untersuchung unterschiedlicher Störungsarten zielt darauf ab, ein grundlegendes Verständnis darüber zu entwickeln, wie sich spezifische Defekte im akustischen Verhalten periodischer Materialien manifestieren.

Die Untersuchung realer Bauteile aus faserverstärkten Kunststoffen ist derzeit mit zusätzlichen Herausforderungen verbunden. Zum einen sind viele strukturelle Störungen von außen nicht eindeutig sichtbar, wodurch eine gezielte Lokalisierung und Bewertung erschwert wird. Zum ande-

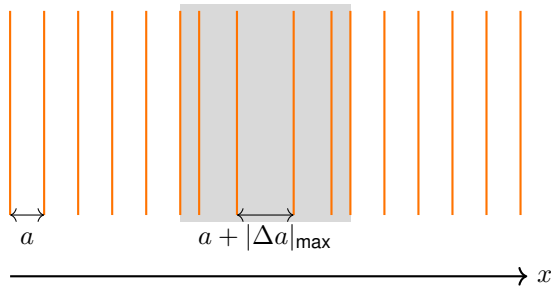


Abb. 5: Eindimensionale periodische Struktur mit Störung im grauen Bereich, welche durch Laserablation in homogene Polyamid 6 Platten realisiert wird.

ren erfordern insbesondere umgeformte Proben eine Anpassung des Messaufbaus, um eine Fokussierung auf die Bauteiloberfläche sicherzustellen. Diese Einschränkungen motivieren den Einsatz von Modellproben mit definierten Eigenschaften, um zunächst ein grundlegendes Prozess- und Systemverständnis zu erarbeiten.

Homogene Kunststoffplatten (Polyamid 6) mit einer Dicke von 1 mm dienen als Grundlage für die Untersuchung von strukturierten Modellproben mit gestörter Periodizität. Die Strukturierung erfolgt mittels Laserablation, bei dem das Material durch linienförmige Vertiefungen modifiziert wird. Die eingebrachten Strukturen haben eine Tiefe von etwa zwei Dritteln der Plattendicke. In die Modellproben werden eindimensionale periodische Strukturen sowohl in ungestörter Form zur Definition eines Referenzsystems als auch mit gezielt eingebrachten Störungen der Periodizität realisiert. Die ungestörte Struktur besteht aus äquidistant angeordneten Linien mit einem Abstand von a . Die gestörte periodische Struktur ist schematisch in Abbildung 5 dargestellt, wobei etwa ein Drittel der Gesamtstruktur von der Modifikation betroffen ist. Durch eine entsprechende Skalierung der Struktur wird im Randbereich der gestörten Zone eine Stauchung und im zentralen Bereich eine Dehnung erzeugt. Ziel dieser Gestaltung ist eine Annäherung an einen realitätsnahen Anwendungsfall: In faserverstärkten Kunststoffen können infolge von Umformprozessen lokale Störungen der Struktur auftreten, bei denen Randbereiche verdichtet (gestaucht) und Bereiche in Umformtälern gedehnt werden.

Auswertung

Die periodisch strukturierten Modellproben werden mit dem oben beschriebenen Experimental-aufbau vermessen. Die Anregung erfolgt auf der Seite der eingepprägten Struktur, während die Detektion auf der gegenüberliegenden Plattenseite durchgeführt wird. Die Struktur erstreckt sich über den gesamten Messweg von 75 mm. Im Falle von

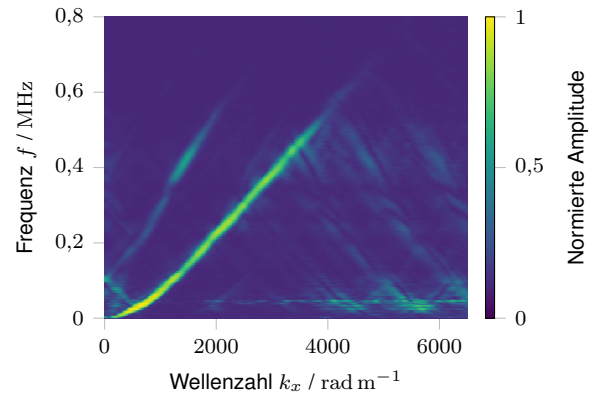


Abb. 6: Messdaten für die Dispersionseigenschaften von akustischen Wellen in einer Platte aus Polyamid 6 mit eingepprägter periodischer Struktur und lokaler Störung gemäß Abbildung 5.

Störungen in der Periodizität ist die Modifikation – wie in Abbildung 5 dargestellt – im mittleren Drittel des Messbereichs lokalisiert.

Im Folgenden wird die Modellprobe mit ungestörter Struktur (Strukturgröße von $a = 5$ mm) mit einer Probe mit einer maximalen Abweichung in der Struktur von $|\Delta a|_{\max} = 1,03$ mm verglichen. Abbildung 6 zeigt die Messdaten der Modellprobe mit gestörter Periodizität. Im Gegensatz zu den Messdaten eines faserverstärkten Kunststoffs (Abbildung 3), bei der von einer ungestörten Periodizität ausgegangen wird, ist erkennbar, dass die zu untersuchenden Wiederholungen im Wellenzahlbereich unschärfer ausfallen. Die über die Frequenz gemittelte Autokorrelationsfunktion beider Modellproben ist in Abbildung 7 dargestellt. Für die Modellprobe mit ungestörter Periodizität, d. h. mit äquidistanten Linien, sind die Maxima der Autokorrelationsfunktion deutlicher ausgeprägt. Zudem bleiben die Maxima vom Betrag auch für größere differentielle Wellenzahlen Δk_x nahezu konstant. Diese Beobachtungen bestätigen mit dem dispersiven Verhalten die ausgeprägte periodische Struktur dieser Probe. Im Gegensatz dazu zeigt die Autokorrelationsfunktion der Messdaten der Modellprobe mit gestörter Periodizität ein verändertes Verhalten. Zwar ist das erste Nebenmaximum nach dem Hauptmaximum noch deutlich erkennbar, jedoch sind die darauffolgenden Maxima schwächer ausgeprägt oder nicht mehr erkennbar.

Sowohl das erste Nebenmaximum der ungestörten Modellprobe als auch das entsprechende Maximum der gestörten Modellprobe treten bei $\Delta k_x = 1255 \text{ rad m}^{-1}$ auf (grün markiert in Abbildung 7). Unter Verwendung von Gleichung 1 ergibt sich daraus eine charakteristische Struktur-

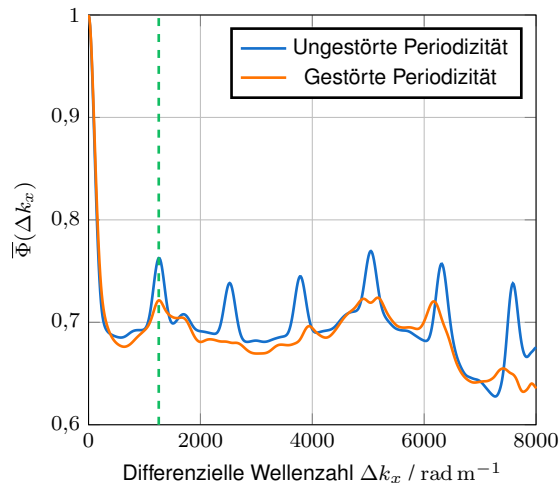


Abb. 7: Die über die Frequenz gemittelte Autokorrelationsfunktion $\bar{\Phi}(\Delta k_x)$ in Richtung der Wellenzahl für die Modellproben mit ungestörter und gestörter Periodizität.

größe von $a = 5,00 \text{ mm}$, was der vorgegebenen Periodizität und somit der Erwartung entspricht. Eine quantitative Betrachtung des ersten Nebenmaximums der gemittelten Autokorrelationsfunktion in Abbildung 8 liefert bei ungestörter Periodizität einen Maximalwert von 0,76, während die Modellprobe mit Störung der Periodizität mit 0,72 einen geringeren Maximalwert erreicht. Da beide Autokorrelationsfunktionen normiert sind, kann die Höhe des ersten Nebenmaximums als Maß für die Ausprägung der Periodizität herangezogen werden.

Neben der Ausprägung kann auch die Halbwertsbreite des Nebenmaximums als Kenngröße zur Beurteilung von Störungen in periodisch strukturierten Materialien dienen. Visuell ist erkennbar, dass das Nebenmaximum der Modellprobe mit ungestörter Periodizität deutlich schmäler ausgeprägt ist als das der gestörten Modellprobe. Die Halbwertsbreite ergibt sich aus dem Wellenzahlintervall, für das die Autokorrelationsfunktion größer ist als der halbe Abstand zwischen ihrem Maximum und dem globalen Minimum im betrachteten Bereich. Quantitativ ergibt sich für die Modellprobe mit ungestörter Periodizität eine Halbwertsbreite von 265 rad m^{-1} , während die Modellprobe mit gestörter Periodizität mit 697 rad m^{-1} eine deutlich größere Halbwertsbreite aufweist.

Eine Erweiterung der Studie um eine Modellprobe mit geringerer maximaler Abweichung der Strukturgröße ($|\Delta a|_{\max} = 0,55 \text{ mm}$) zeigt, dass für beobachtete Größen (Ausprägung des ersten Nebenmaximums und Halbwertsbreite) kontinuierliche Zusammenhänge zur Ausprägung der Störung zu erwarten sind (Tabelle 1). Der Wert des

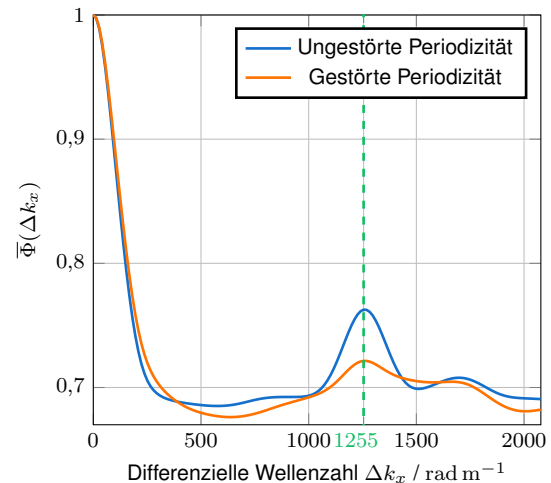


Abb. 8: Betrachtung des ersten Nebenmaximums der Autokorrelationsfunktion $\bar{\Phi}(\Delta k_x)$ für die zu vergleichenden Modellproben.

Tab. 1: Quantitative Gegenüberstellung der ersten Nebenmaxima der gemittelten Autokorrelationsfunktion $\bar{\Phi}(\Delta k_x)$ für drei Modellproben mit variierender maximaler Abweichung $|\Delta a|_{\max}$ der Strukturgröße a .

$ \Delta a _{\max}$ / mm	$\bar{\Phi}_{\max}(\Delta k_x \neq 0)$	Halbwertsbreite / rad m^{-1}
0	0,76	265
0,55	0,73	321
1,03	0,72	697

ersten Nebenmaximums $\bar{\Phi}_{\max}(\Delta k_x \neq 0)$ nimmt mit abnehmender Störung zu und liegt hier mit einem Wert von 0,73 zwischen der ungestörten und der stärker gestörten Modellprobe. Ein analoges Verhalten zeigt die Halbwertsbreite, die bei geringerer Störung deutlich kleiner ist und in diesem Fall ungefähr halb so groß ausfällt wie bei der stärker gestörten Modellprobe.

Die Ergebnisse zeigen, dass sowohl eine geringere relative Höhe als auch die vergrößerte Halbwertsbreite des ersten Nebenmaximums in der Autokorrelationsfunktion bezüglich der Wellenzahl auf eine Störung in der Periodizität der Probe hinweisen. Während die Abnahme der Maximalwerte eine geringere Selbstähnlichkeit der periodischen Struktur widerspiegelt, deutet die Verbreiterung des Peaks auf eine Variation in der Korrelationslänge und damit auf eine stärkere strukturelle Inhomogenität hin. Insgesamt bestätigen beide Kenngrößen konsistent die Beeinträchtigung der Fernordnung infolge der eingebrachten Störung.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird eine Methode vorgestellt, um Abweichungen in der Strukturgröße periodisch strukturierten Materialien mithilfe breitbandiger Ultraschallwellen zu bestimmen. Die Motivation dieser Arbeit besteht in der Untersuchung periodisch strukturierter Materialien wie faserverstärkter Kunststoffe, deren mechanische Eigenschaften maßgeblich durch Geometrie und Größe der Gewebestrukturen beeinflusst werden, die insbesondere nach Umformprozessen nicht zwingend von außen erkennbar sind. Als Vorarbeit werden in dieser Studie die Grundlagen gelegt, um Störungen in der Periodizität und deren Einfluss auf das dispersive Verhalten solcher Materialien zu charakterisieren. Hierfür werden Modellproben mit ungestörter Periodizität mit Modellproben verglichen, bei denen die periodische Struktur definiert gestört wird. Die Auswertung erfolgt anhand von Autokorrelationsfunktionen im Wellenzahlbereich von Messdaten der akustischen Dispersionseigenschaften. Dabei zeigt sich, dass das erste Nebenmaximum der Autokorrelationsfunktion, welches durch wiederholende Moden hervorgerufen wird, empfindlich auf Störungen der Periodizität im Material reagiert und somit als einfaches, quantifizierbares Maß zur Bewertung solcher Störungen dienen kann.

Für zukünftige Arbeiten sollte diese Untersuchung erweitert werden, um eine größere Vielfalt an Störungsarten systematisch zu charakterisieren, bevor das gewonnene Wissen auf anwendungsnahe Proben (Faserverbundkunststoffe) übertragen wird, bei denen Störungen von außen nicht sichtbar sind. Langfristig ist eine Optimierung des Verfahrens anzustreben, um eine Anwendung in industriellen oder praxisrelevanten Szenarien zu ermöglichen.

Literaturnachweis

- [1] K. M. F. Hasan, P. G. Horváth und T. Alpár. „Potential fabric-reinforced composites: a comprehensive review“. In: *Journal of Materials Science* 56.26 (2021), S. 14381–14415. ISSN: 1573-4803. DOI: 10.1007/s10853-021-06177-6.
- [2] S. Johannesmann, J. Dächting, M. Weberßen, L. Claes und B. Henning. „An acoustic waveguide-based approach to the complete characterisation of linear elastic, orthotropic material behaviour“. In: *tm - Technisches Messen* 2018.85 (2018), S. 478–486. DOI: 10.1515/teme-2017-0132.
- [3] L. Claes, T. Meyer, F. Bause, J. Rautenberg und B. Henning. „Determination of the material properties of polymers using laser-generated broadband ultrasound“. In: *Journal of Sensors and Sensor Systems* 5.1 (2016), S. 187–196. ISSN: 2194-878X. DOI: 10.5194/jsss-5-187-2016.
- [4] D. Alleyne und P. Cawley. „A 2-dimensional Fourier transform method for the quantitative measurement of Lamb modes“. In: *IEE Symposium on Ultrasonics*. IEEE, 1990. DOI: 10.1109/ultsym.1990.171541.
- [5] L. Claes, S. Johannesmann, H. Zeipert und B. Henning. „Broadband acoustic waves in plate-like structures for acoustic material characterisation“. In: *2023 International Congress on Ultrasonics, Beijing, China*. Bd. 2822. IOP Publishing, Sep. 2024, S. 012171. DOI: 10.1088/1742-6596/2822/1/012171.
- [6] F. Bloch. „Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern“. In: *Zeitschrift für Physik* 52.7-8 (1929), S. 555–600.
- [7] G. Floquet. „Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques“. In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. Bd. 12. 1883, S. 47–88.
- [8] A. Khelif und A. Adibi. *Phononic Crystals: Fundamentals and Applications*. Jan. 2015, S. 1–245. ISBN: 978-1-4614-9392-1. DOI: 10.1007/978-1-4614-9393-8.
- [9] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021.
- [10] M. Wippermann, L. Claes, P. Brandes, E. Moritzer und B. Henning. „Determination of the unit cell geometry in fibre-reinforced polymer sheets using guided acoustic waves“. In: 2025. DOI: 10.71568/DASDAGA2025.116.
- [11] M. Wippermann und L. Claes. „Phononic crystallography of fibre-reinforced polymers using broadband acoustic waves“. In: *2025 International Congress on Ultrasonics, Paderborn, Germany*. AMA Service GmbH, 2025, S. 24–27. DOI: 10.5162/ultrasonic2025/a1-b1.