

Der Einfluss der Abtasttakt drift auf unterabgetastete Laser-Doppler-Vibrometer-Signale

Rosver Daniel Sando Fogno¹, Niels Neumann¹, Christian Rembe¹
¹ TU Clausthal, IEI, 38678 Clausthal-Zellerfeld, Leibnizstraße 28, Germany
¹ sandofogno@iei.tu-clausthal.de

Zusammenfassung

Die Laser-Doppler-Vibrometrie (LDV) hat sich als Goldstandard für hochpräzise, berührungslose Schwingungsmessungen in der Strukturanalyse und der Zustandsüberwachung von Bauwerken etabliert. Ihr Einsatz in mobilen oder unbemannten Flugsystemen (UAS) ist jedoch durch den hohen Rechen- und Energiebedarf für die Verarbeitung hochfrequenter Signale zur Erzielung einer höheren Auflösung begrenzt. Die Bandpassunterabtastung ist eine vielversprechende Lösung, um die zu verarbeitende Datenmenge und den Energiebedarf zu reduzieren. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass keine analoge Mischstufe mehr notwendig ist, da die gewünschte Zwischenfrequenz direkt durch die Abtastung im geeigneten Nyquist-Bereich entsteht. Sie stellt jedoch strenge Anforderungen an die Stabilität des Abtasttakts. Diese Stabilität lässt sich auf UAS-Plattformen nur schwer gewährleisten, da hochstabile Oszillatoren aufgrund von Kosten, Baugröße und Leistungsaufnahme meist nicht einsetzbar sind. In dieser Arbeit wird der Einfluss einer Abweichung der Abtastfrequenz in einem Unterabtastungsszenario untersucht. Analytisch wird gezeigt, dass die daraus resultierende Frequenzabweichung im durch eine FFT berechneten Spektrum linear mit der Nyquist-Zonenordnung zunimmt. Dieses Verhalten wurde sowohl durch Simulationen als auch experimentell verifiziert und verdeutlicht eine kritische Verwundbarkeit von Unterabtastung-Verfahren in praxisnahen, ressourcenbeschränkten Anwendungen. Die in diesem Beitrag gezeigten Ergebnisse liefern ein grundlegendes Verständnis der Unsicherheitseinflüsse in unterabgetasteten Systemen und bilden eine wesentliche Grundlage für die Entwicklung robuster Kompensationsverfahren.

Keywords: Laser-Doppler-Vibrometrie, Bandpass-Unterabtastung, Abtasttakt drift, Nyquist-Zonen, Frequenzrekonstruktionsfehler, unbemannte Flugsysteme (UAS)

Einleitung

Die präzise Erfassung mechanischer Schwingungen ist eine zentrale Voraussetzung für die Zustandsüberwachung von Bauwerken im Rahmen des Structural Health Monitoring (SHM). Die Laser-Doppler-Vibrometrie (LDV) hat sich dabei als hochgenaue, berührungslose Messmethode etabliert, da sie Schwingungsgeschwindigkeiten mit hoher Orts- und Frequenzauflösung erfassen kann und gegenüber kontaktbehafteten Sensoren keine Massebelastung verursacht [1].

Mit dem zunehmenden Einsatz unbemannter Flugsysteme (Unmanned Aerial Systems, UAS) für die automatisierte Inspektion von Infrastrukturen wächst der Bedarf an kompakten und energieeffizienten LDV-Systemen [2]. Die Integration auf mobilen Plattformen ist jedoch mit erheblichen Herausforderungen verbunden. Insbesondere erfordert die Verarbeitung der hochfrequenten LDV-Signale Abtastraten im zweistelligen

Megahertz-Bereich, um die notwendige zeitliche Auflösung sicherzustellen [3]. Dies führt zu großen Datenmengen, hohem Rechenaufwand und signifikantem Energiebedarf, was die Einsatzdauer und Echtzeitfähigkeit auf ressourcenbeschränkten UAS-Plattformen limitiert [4], [5].

Ein vielversprechender Ansatz zur Reduktion der Datenrate und Systemkomplexität ist die Bandpass-Unterabtastung (Bandpass Subsampling). Dabei wird das hochfrequente Signal gezielt in eine niedrigere Nyquist-Zone abgebildet, sodass eine deutlich reduzierte Abtastfrequenz ausreicht, ohne Informationsverlust zu verursachen, sofern die Bandpass-Bedingungen des Nyquist-Shannon-Theorems eingehalten werden [4]. Zusätzlich kann auf eine analoge Mischstufe verzichtet werden, was die Hardwarekomplexität und den Energiebedarf weiter reduziert.

Die Leistungsfähigkeit dieses Ansatzes ist jedoch maßgeblich von der Stabilität des Abtasttakts abhängig. Während in stationären

Messsystemen hochstabile Oszillatoren (z. B. OCXOs) eingesetzt werden können, sind diese für UAS-Anwendungen aufgrund von Größe, Kosten und Leistungsaufnahme häufig ungeeignet. Abweichungen der Abtastfrequenz führen in unterabgetasteten Systemen zu systematischen Abweichungen in der Frequenzrekonstruktion. Dieser Effekt unterscheidet sich grundlegend von konventioneller Abtastung und verstärkt sich mit steigender Ordnung der genutzten Nyquist-Zone. Eine Nyquist-Zone umfasst den Frequenzbereich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von $\frac{f_s}{2}$ und besitzt somit die Breite $\frac{f_s}{2}$. Die Zonenordnung wird mit N_Z bezeichnet.

In diesem Beitrag wird der Einfluss von einer Abtasttakt drift auf unterabgetastete LDV-Signale systematisch untersucht. Es wird analytisch hergeleitet, dass die resultierende Frequenzabweichung linear mit der Nyquist-Zonennummer zunimmt. Dieses Verhalten wird durch Simulationen sowie experimentelle Messungen verifiziert.

Die vorgestellten Ergebnisse liefern ein fundiertes Verständnis der Grenzen von Bandpass-Unterabastungsverfahren in mobilen LDV-Systemen und bilden die Grundlage für die Entwicklung robuster Kompensationsstrategien in energieeffizienten UAS-Anwendungen.

Laser-Doppler-Vibrometrie (LDV) und Signalcharakteristik

In einem typischen Heterodyn-LDV-System wird ein Laserstrahl in einen Referenz- und einen Messstrahl aufgeteilt. Der Messstrahl wird auf die schwingende Oberfläche gerichtet, wobei das reflektierte Licht aufgrund des Doppler-Effekts eine frequenzabhängige Verschiebung erfährt, die proportional zur Oberflächengeschwindigkeit ist [6].

Zur Erzeugung eines heterodynen Schwebungssignals wird die Frequenz des Referenzstrahls mithilfe einer Bragg-Zelle (akusto-optischer Modulator, AOM) um eine feste Frequenz f_c verschoben. Diese Trägerfrequenz liegt typischerweise im Bereich von 40 MHz bis 80 MHz.

Die Überlagerung von Referenz- und Messstrahl am symmetrischen Photodetektor führt zu dem elektrischen Ausgangssignal [7]

$$i_{BD} = K_{PD} \sqrt{P_r P_m} \varepsilon \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)), \quad (1)$$

wobei K_{PD} die Gesamtverstärkung aus Photodetektor und nachfolgender Transimpedanzverstärkung beschreibt. P_r und P_m bezeichnen die optischen Leistungen des Referenz- bzw. Messstrahls, ε den Interferenzkontrast und $\varphi(t)$ die durch die Bewegung des Messobjekts hervorgerufene Dopplerphase.

Die Gesamtphase des Signals ergibt sich zu

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t) \quad (2)$$

Durch zeitliche Ableitung der Gesamtphase erhält man die Momentanfrequenz des LDV-Signals

$$f_{mom}(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\theta}(t) = f_c + f_D(t), \quad (3)$$

wobei f_D die Dopplerfrequenz bezeichnet. Diese ist gegeben durch

$$f_D(t) = \frac{2 \cdot v(t)}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t), \quad (4)$$

wobei λ die Laserwellenlänge und $v(t)$ die Oberflächengeschwindigkeit des Messobjekts beschreibt.

Die Momentanphase $\varphi(t)$ steht dabei in direktem Zusammenhang zur gesuchten Auslenkung $s(t)$ über

$$\phi(t) = \frac{4\pi}{\lambda} s(t). \quad (5)$$

Durch die Braggzelle wird im Heterodyn-Verfahren das gesuchte Nutzsignal somit von der Nullfrequenz gezielt in einen hohen Frequenzbereich auf die Zwischenfrequenz f_c geschoben. Der Einsatz der Braggzelle hat dabei zwei wichtige Vorteile.

Erstens erlaubt dieses Vorgehen nun auch die Detektion der Richtung der Bewegung, was im homodynen Fall ($f_c = 0$ Hz) nicht möglich wäre. Zweitens wird der störende Einfluss von niederfrequentem Rauschen und Gleichanteilen reduziert, welche die Messgenauigkeit andernfalls beeinträchtigen würden [8].

Bei konventioneller Direktabtastung ergibt sich die erforderliche Abtastfrequenz zu

$$f_s \geq 2 \cdot (f_c + f_D^{max}). \quad (6)$$

Bei einer typischen Trägerfrequenz von 40 MHz und einer Dopplerbandbreite im Megahertz-Bereich ergeben sich erforderliche Abtastraten im zweistelligen Megasample-Bereich. Dies

führt zu hohen Datenraten sowie einem erhöhten Rechenaufwand für die digitale Signalverarbeitung.

Die hohen Abtastraten stellen eine wesentliche Herausforderung für den Einsatz von LDV-Systemen auf ressourcenbeschränkten Plattformen wie unbemannten Flugsystemen (UAS) dar. Der Energiebedarf von Analog-Digital-Wandlern steigt mit zunehmender Abtastrate, während gleichzeitig hohe Datenraten die Anforderungen an Signalverarbeitung, Speicherung und echtzeitfähige Übertragung signifikant erhöhen. Daraus ergibt sich ein grundlegender Zielkonflikt zwischen der hohen Trägerfrequenz des LDV-Signals und den begrenzten Ressourcen hinsichtlich Energie, Rechenleistung und Gewicht auf mobilen Plattformen.

Obwohl die eigentliche Informationsbandbreite des Signals vergleichsweise gering ist, erzwingt die hohe Trägerfrequenz bei konventioneller Abtastung unverhältnismäßig große Abtastraten. Beispielsweise ergibt sich für eine maximale Dopplergeschwindigkeit von $v_D^{max} = 40 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ und eine Schwingungsfrequenz von $f_{vib} = 100 \text{ Hz}$ gemäß DIN 4150-3 bei Verwendung eines grünen Lasers mit $\lambda = 532 \text{ nm}$ eine maximale Dopplerfrequenz von:

$$f_D^{max} = \frac{2 \cdot v_D^{max}}{\lambda} \approx 150,94 \text{ kHz} \quad (7)$$

und unter Anwendung der Carson-Regel eine effektive Signalbandbreite [7]:

$$B = 2 \cdot (f_{vib} + f_D^{max}) \approx 501,98 \text{ kHz} \quad (8)$$

Bandpass-Unterabtastung

Unterabtastung (*Subsampling*), auch Bandpass-Unterabtastung oder harmonische Abtastung genannt, ist eine fortgeschrittene Technik, die speziell für die Digitalisierung von bandbegrenzten Hochfrequenzsignalen eingesetzt wird. Im Gegensatz zur Nyquist-Abtastung, die eine Abtastfrequenz von $f_s \geq 2 \cdot f_{max}$ (bezogen auf die höchste Signalfrequenz) erfordert, wird bei der Unterabtastung ein Signal mit einer Abtastfrequenz digitalisiert, die kleiner als $2 \cdot f_{max}$ [9]. Hierbei wird das Phänomen des Aliasing gezielt genutzt, um das hochfrequente Bandpasssignal in eine tiefere Nyquist-Zone zu überführen, von wo es ohne Informationsverlust rekonstruiert werden kann.

Das Eingangssignal muss zunächst durch einen analogen Bandpassfilter (BPF) begrenzt werden, siehe Abb. 1. Dieser Filter stellt sicher, dass das Signal vollständig innerhalb einer einzigen Nyquist-Zone liegt und unerwünschte Aliasing-Effekte von außerhalb des gewünschten Bandes minimiert werden, siehe Abb. 2.

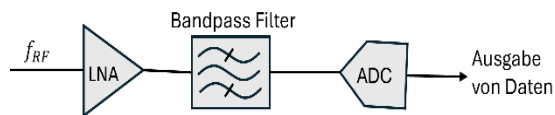


Abb. 1: Prinzipielle Struktur eines unterabtastenden Empfangssystems mit Bandpassfilter (BPF), Verstärkung (LNA) und Digitalisierung (ADC). Der BPF stellt sicher, dass das Signal innerhalb einer Nyquist-Zone liegt.

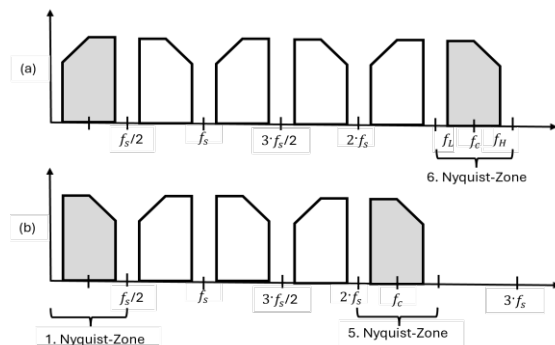


Abb. 2: Aliasbildung eines Bandpasssignals über mehrere Nyquist-Zonen. Das Signal muss vollständig innerhalb einer Zone liegen; in geraden Nyquist-Zonen tritt eine Spektral inversion auf.

Ein bandbegrenztes Signal mit Mittenfrequenz f_c , das sich in der N_Z -ten Nyquist-Zone befindet, wird durch Unterabtastung in eine niedrigere Frequenzlage abgebildet. Die resultierende Aliasfrequenz ergibt sich zu

$$f_a = \begin{cases} f_c - n \cdot f_s, & \text{ungerades } N_Z \\ n \cdot f_s - f_c, & \text{gerades } N_Z \end{cases}, \quad (9)$$

mit

$$n = \left\lfloor \frac{f_c}{f_s} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \text{round} \left(\frac{f_c}{f_s} \right), \quad (10)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ den Alias-Index bezeichnet, d. h. den Index des der Trägerfrequenz f_c nächstgelegenen Vielfachen der Abtastfrequenz f_s .

Die Funktion $\text{round}(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ordnet x die nächstgelegene ganze Zahl zu, wobei $\lfloor x \rfloor$ die Floor-Funktion bezeichnet, die eine reelle Zahl x auf die nächstkleinere ganze Zahl abrundet. Durch geeignete Wahl von f_s kann das Signal gezielt in eine gewünschte niedrigere

Frequenzlage abgebildet werden, sodass eine deutlich reduzierte Abtastrate ausreichend ist. Zusätzlich ist zu beachten, dass die Lage des abgebildeten Spektrums von der Parität der Nyquist-Zone abhängt. Während in geraden Nyquist-Zonen (siehe Abb. 2(a)) Spektralspiegelung auftritt, wird das Signal in ungeraden Nyquist-Zonen (siehe Abb. 2(b)) nicht invertiert abgebildet. Dies führt dazu, dass die Richtung der Frequenzverschiebung zwischen aufeinanderfolgenden Zonen wechseln kann. Der beschriebene Effekt ist deterministisch und kann bei bekannter Nyquist-Zone mathematisch durch eine einfache Invertierung eindeutig korrigiert werden, sodass er die grundsätzliche lineare Abhängigkeit des Fehlers nicht beeinflusst.

Damit keine Überlappung der Spektralrepliken auftritt, muss die Abtastfrequenz so gewählt werden, dass das gesamte Signalband eindeutig in eine Nyquist-Zone abgebildet wird. Für ein Signal mit unterer und oberer Grenzfrequenz f_L und f_H ergeben sich die zulässigen Abtastfrequenzen zu [9]

$$\frac{2 \cdot f_H}{N_Z} \leq f_s \leq \frac{2 \cdot f_L}{N_Z - 1} \quad (11)$$

und die Nyquist-Zone muss die Bedingung erfüllen

$$2 \leq N_Z \leq \left\lfloor \frac{f_H}{B} \right\rfloor. \quad (12)$$

Diese Bedingung stellt sicher, dass die durch Aliasing entstehenden Spektralanteile nicht miteinander interferieren und die ursprüngliche Information vollständig erhalten bleibt.

N_Z	f_c (MHz)	$ \Delta f_a = f_{a_{ist}} - f_{a_{soll}} $ (kHz)	$\Delta f_{a,N_Z} - \Delta f_{a,N_Z-2}$ (kHz)
1	0.275	$ 274.850 - 275 = 0.150$	-
2	0.825	$ 286.891 - 275 = 11.891$	11.741
4	1.925	$ 299.078 - 275 = 24.078$	12.187
6	3.025	$ 310.935 - 275 = 35.935$	11.857
8	4.125	$ 323.123 - 275 = 48.123$	12.188
10	5.225	$ 334.98 - 275 = 59.98$	11.857
12	6.325	$ 346.838 - 275 = 71.838$	11.858
$\Delta f_s = f_s - f'_s = 11.989 \text{ kHz}$			
Sollträger $f_a = 275 \text{ kHz}$			

Um sicherzustellen, dass die Trägerfrequenz im Zentrum einer Nyquist-Zone liegt, gilt nach Gleichung [10]

$$f_s = \frac{4 \cdot f_c}{2 \cdot N_Z - 1}. \quad (13)$$

Diese Wahl ist besonders vorteilhaft, da sie den maximalen Abstand zu den Zonengrenzen gewährleistet und dadurch die Empfindlichkeit gegenüber Überlappung reduziert.

Einfluss von Abtasttakt drift

In praktischen Abtastsystemen ist die Abtastfrequenz f_s nicht exakt konstant, sondern unterliegt Abweichungen infolge von Taktinstabilitäten des verwendeten Oszillators. Die tatsächliche Abtastfrequenz kann daher als

$$f'_s = f_s + \Delta f_s \quad (14)$$

ausgedrückt werden.

Wird ein sinusförmiges Hochfrequenzsignal $x(t) = A \cos(2\pi f_c t)$ mit einer Samplingfrequenz $f_s < 2 \cdot f_c$ und bei der geplanten gezielten Positionierung in der Mitte der jeweiligen Nyquist-Zone, d.h. gemäß Gl. (13), abgetastet, ergibt sich für die ideale Abbildungsfrequenz nach Unterabtastung

$$f_a = |f_c - n \cdot f_s|. \quad (15)$$

Ist nun die reale Abtastfrequenz durch Taktinstabilität verändert und beträgt stattdessen f'_s , so verschiebt sich das Aliassignal im Spektrum zu

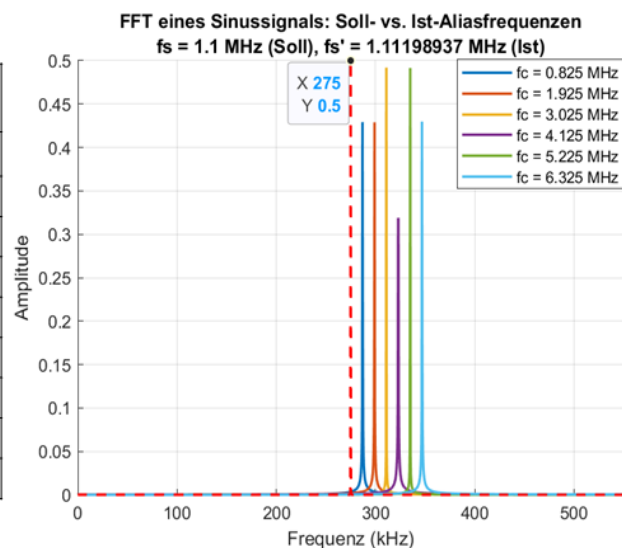


Abb. 3: Simulation der Frequenzverschiebung bei Bandpass-Unterabtastung infolge von Abtasttakt drift ($f_s = 1,1 \text{ MHz}$, $f'_s = 1,111989 \text{ MHz}$). Mit steigender Nyquist-Zonenordnung N_Z verschiebt sich die Aliasfrequenz systematisch, während die Signalfrequenz im Spektrum erhalten bleibt. Die Frequenzabweichung nimmt dabei linear mit N_Z zu ($\Delta f_a \propto N_Z$).

$$f'_a = |f_c - n(f_s + \Delta f_s)|. \quad (16)$$

Die Abweichung Δf_a zwischen idealer und realer Spektralposition ergibt sich dann zu

$$\Delta f_a = |f_c - n(f_s + \Delta f_s) - (f_c - n \cdot f_s)| = |-n \Delta f_s|. \quad (17)$$

Diese exakte Entwicklung zeigt: Die Verschiebung im Spektrum ist linear proportional zur Abtastfrequenz-Abweichung Δf_s und zum Index n der Aliasing-Zone. Unter Verwendung der in Gl. (13) definierten Wahl der Abtastfrequenz ergibt sich für zwei Nyquist-Zonen N_Z und $N_Z + 2$

$$n = \left\lfloor \frac{f_c}{f_s} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2N_Z - 1}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2N_Z + 1}{4} \right\rfloor$$

$$n' = \left\lfloor \frac{2(N_Z + 2) - 1}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2N_Z + 5}{4} \right\rfloor.$$

Dann gilt

$$\Delta f'_a - \Delta f_a = |n' \cdot \Delta f_s| - |n \cdot \Delta f_s| = |n' - n| \cdot \Delta f_s \quad (18)$$

$$\Delta f'_a - \Delta f_a = \left| \left\lfloor \frac{2N_Z + 5}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2N_Z + 1}{4} \right\rfloor \right| \cdot \Delta f_s$$

$$\Delta f'_a - \Delta f_a = \Delta f_s \quad (19)$$

mit $\lfloor x + 1 \rfloor - \lfloor x \rfloor = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Damit zeigt sich mit der Gl. (19): Die Frequenzverschiebung nimmt pro zwei Nyquist-Zonen um genau Δf_s zu.

Ergebnisse: Simulation und Experiment

Um die theoretisch hergeleitete Abhängigkeit des Frequenzfehlers von der Nyquist-Zone zu validieren, wurden sowohl numerische Simulationen als auch experimentelle Messungen durchgeführt. Die Untersuchungen konzentrierten sich auf den Vergleich der Soll-Trägerfrequenz mit der durch Instabilitäten verschobenen Ist-Trägerfrequenz im rekonstruierten Spektrum.

Für die Simulation wurde ein sinusförmiges Signal mit variabler Trägerfrequenz f_c betrachtet, das einer Bandpass-Unterabtastung unterzogen wird. Die nominale Abtastfrequenz wurde dabei auf $f_s = 1,1$ MHz festgelegt, während die tatsächliche Abtastfrequenz $f'_s = 1,111989$ MHz betrug, was einer Differenz von $\Delta f_s = 11,989$ kHz entspricht. Die Trägerfrequenz wurde gemäß Gl. (13) gezielt so gewählt, dass sie sich für unterschiedliche Werte von N_Z im Zentrum der jeweiligen Nyquist-Zonen befindet. Dadurch wird sichergestellt, dass die beobachteten Effekte ausschließlich auf die Abtastabweichung zurückzuführen sind.

Die Simulationsergebnisse sind in der rechten Darstellung von Abb. 3 dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, dass sich die spektrale Lage des Signals mit steigender Nyquist-Zonenordnung systematisch verschiebt. Während bei niedrigen Nyquist-Zonen nur geringe Abweichungen auftreten, wächst die Frequenzverschiebung bei höheren Zonen deutlich an. Die Verschiebung erfolgt dabei entlang der Frequenzachse, während die Signalförmigkeit im Spektrum erhalten bleibt.

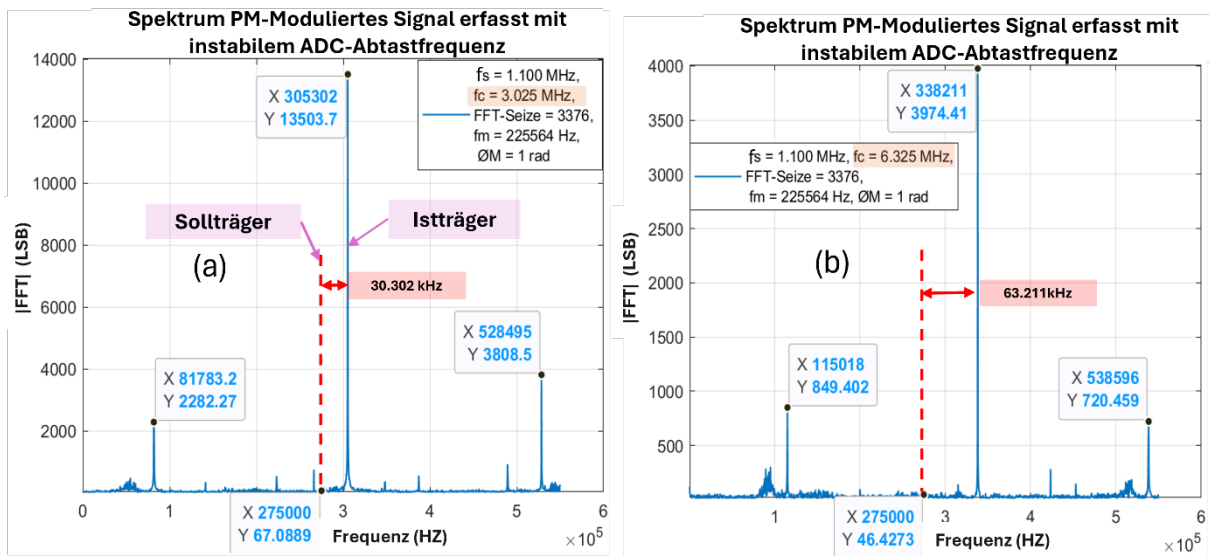


Abb. 4: Frequenzabweichung des Trägersignals bei steigenden Nyquist-Zonen: (a) $f_c = 3.025$ MHz (6. N_Z), Abweichung $\Delta f_a = 30.302$ kHz; (b) $f_c = 6.325$ MHz (12. N_Z), Abweichung $\Delta f_a = 63.211$ kHz. Die Richtung der Verschiebung bleibt gleich, die Abweichung nimmt jedoch mit wachsendem N_Z deutlich zu.

Ein quantitativer Vergleich ist in der Tabelle links in Abb. 3 dargestellt. Ausgehend von einem Sollträger bei $f_a = 275$ kHz ergibt sich für $N_Z = 6$ eine Frequenzabweichung von 35,935 kHz, während diese für $N_Z = 12$ auf 71,838 kHz ansteigt. Gleichzeitig zeigt die Differenz $\Delta f_{N_Z} - \Delta f_{N_Z-2}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nyquist-Zonen eine nahezu konstante Zunahme von etwa 11,8 kHz. Es ist zu beobachten, dass dieser Wert geringfügig von der theoretisch erwarteten Abweichung der Abtastfrequenz Δf_s differiert. Diese Diskrepanz lässt sich primär auf die endliche Frequenzauflösung der diskreten Fourier-Transformation (DFT) zurückführen. Bei einer FFT-Länge von 3376 Punkten und einer Abtastrate von 1,1 MHz beträgt die Bin-Breite ca. 325,8 Hz.

Ergänzend zur Simulation wurden experimentelle Messungen durchgeführt, um die beobachteten Effekte unter realen Bedingungen zu verifizieren. Hierzu wurde ein phasenmoduliertes Signal mithilfe eines Signalgenerators (Rohde & Schwarz SML03) erzeugt und über einen 16-Bit-Analog-Digital-Wandler des Arduino Portenta H7 digitalisiert. Die Abtastfrequenz des Systems weist dabei, bedingt durch die interne Taktquelle, eine Abweichung von der nominalen Einstellung auf. Weitere Details zu den Versuchsparametern sind in Abb. 4 dargestellt.

Die experimentellen Ergebnisse bestätigen die Simulation. In Abb. 4(a) ist der Fall für $N_Z = 6$ dargestellt, bei dem sich eine Frequenzabweichung zwischen Soll- und Istträger von etwa 30,3 kHz ergibt. Für den Fall $N_Z = 12$, dargestellt in Abb. 4(b), steigt diese Abweichung auf etwa 63,2 kHz an. Damit zeigt sich eine deutliche Zunahme der Abweichung mit steigender Nyquist-Zonenordnung. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Differenz der Frequenzabweichung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nyquist-Zonen näherungsweise konstant ist. Dies bestätigt den analytisch hergeleiteten linearen Zusammenhang:

$$\Delta f_a \propto N_Z$$

Die beobachteten leichten Abweichungen von einer ideal konstanten Differenz lassen sich im experimentellen Aufbau durch zusätzliche Effekte erklären. Im Gegensatz zur Simulation unterliegt die reale Abtastfrequenz zeitlichen Schwankungen (Taktjitter), wodurch die effektive Frequenzabweichung nicht strikt konstant ist. Darüber hinaus beeinflussen

Rauschen sowie die endliche FFT-Auflösung die Bestimmung der Spektralpeaks.

Die Richtung der Frequenzverschiebung bleibt dabei über alle betrachteten Nyquist-Zonen hinweg konstant, während sich der Betrag des Fehlers weiterhin näherungsweise linear vergrößert. Die Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie, Simulation und Experiment.

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegenden Untersuchungen zeigen, dass die Bandpass-Unterabtastung zwar eine effektive Reduktion der Abtastrate und damit des Energiebedarfs ermöglicht, jedoch gleichzeitig eine inhärente Sensitivität gegenüber Abtasttakt drift aufweist. Es wurde analytisch hergeleitet und sowohl durch Simulation als auch experimentell bestätigt, dass der resultierende Frequenzfehler proportional zur Nyquist-Zonenordnung anwächst. Damit führt ein zunehmender Unterabtastungsfaktor direkt zu einer Verstärkung von Abweichungen der Frequenzlage im Spektrum.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass bereits kleine Taktabweichungen bei höheren Nyquist-Zonen zu signifikanten Abweichungen in der Frequenzrekonstruktion führen können. Dieser Effekt ist insbesondere für LDV-Anwendungen kritisch, da die physikalische Messgröße unmittelbar aus der Frequenzinformation abgeleitet wird. In ressourcenbeschränkten Systemen, wie sie beispielsweise auf unbemannten Flugsystemen eingesetzt werden, stellt dies eine fundamentale Einschränkung dar, da dort häufig keine hochstabilen Taktquellen verfügbar sind.

Insgesamt ergibt sich somit ein grundlegender Zielkonflikt zwischen der Reduktion der Abtastrate durch Unterabtastung und der erreichbaren Messgenauigkeit. Die Wahl der Nyquist-Zone stellt dabei einen zentralen Entwurfsparameter dar, der sowohl die Energieeffizienz als auch die Robustheit gegenüber Abtasttakt drift maßgeblich beeinflusst.

Zukünftige Arbeiten werden sich daher auf die Entwicklung und Evaluierung geeigneter Kompensationsverfahren konzentrieren, mit dem Ziel, die durch Abtasttakt drift verursachten Abweichungen zu reduzieren. Insbesondere erscheint die Nutzung zusätzlicher Referenzsignale sowie modellbasierter Korrekturansätze vielversprechend, um die Vorteile der Bandpass-Unterabtastung auch in

driftbehafteten, mobilen Systemen zuverlässig nutzbar zu machen.

Literaturnachweis

- [1] C. Providakis, M. Moustarakis, und G. Providakis, „Operational Modal Analysis of Historical Buildings and Finite Element Model Updating Using α Laser Scanning Vibrometer“, *Infrastructures*, Bd. 8, S. 37, Feb. 2023, doi: 10.3390/infrastructures8020037.
- [2] C. Rembe, B. J. Halkon, und M. A. A. Ismail, „Measuring Vibrations in Large Structures with Laser-Doppler Vibrometry and Unmanned Aerial Systems: A Review and Outlook“, *Advanced Devices & Instrumentation*, Bd. 6, S. 0103, Sep. 2025, doi: 10.34133/adi.0103.
- [3] H. Volkers, „On the calibration of laser Doppler vibrometers using simulated excitation“, *Measurement: Sensors*, Bd. 38, S. 101748, Mai 2025, doi: 10.1016/j.measen.2024.101748.
- [4] C.-H. Tseng, „Bandpass sampling criteria for nonlinear systems“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Bd. 50, Nr. 3, S. 568–577, März 2002, doi: 10.1109/78.984739.
- [5] H. Wang u. a., „An Elegant Solution: An Alternative Ultra-Wideband Transceiver Based on Stepped-Frequency Continuous-Wave Operation and Compressive Sensing“, *IEEE Microwave Magazine*, Bd. 17, Nr. 7, S. 53–63, Juli 2016, doi: 10.1109/MMM.2016.2549138.
- [6] C. Rembe und A. Dräbenstedt, „D1.1 - Speckle-Insensitive Laser-Doppler Vibrometry with Adaptive Optics and Signal Diversity“, in *Proceedings SENSOR 2015*, Nürnberg, Germany: AMA Service GmbH, Von-Münchhausen-Str. 49, 31515 Wunstorf, Germany, 2015, S. 505–510. doi: 10.5162/sensor2015/D1.1.
- [7] C. Rembe u. a., „Laser Doppler vibrometry“, *Nat Rev Methods Primers*, Bd. 6, Nr. 1, S. 30, Apr. 2026, doi: 10.1038/s43586-026-00487-2.
- [8] H. Tabatabai, D. E. Oliver, J. W. Rohrbaugh, und C. Papadopoulos, „Novel Applications of Laser Doppler Vibration Measurements to Medical Imaging“, *Sens Imaging*, Bd. 14, Nr. 1, S. 13–28, 2013, doi: 10.1007/s11220-013-0077-1.
- [9] R. G. Vaughan, N. L. Scott, und D. R. White, „The theory of bandpass sampling“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Bd. 39, Nr. 9, S. 1973–1984, Sep. 1991, doi: 10.1109/78.134430.
- [10] G. Giovannetti u. a., „Application of undersampling technique for the design of an NMR signals digital receiver“, *Concepts in Magnetic Resonance Part B: Magnetic Resonance Engineering*, Bd. 29B, Nr. 3, S. 107–114, 2006, doi: 10.1002/cmr.b.20065.